Dynamique du point

Application
On étudie le dispositif de Fig.1
Déterminer l'équation horaire vérifiée par l'angle polaire θ dans le cas de petites oscillations.

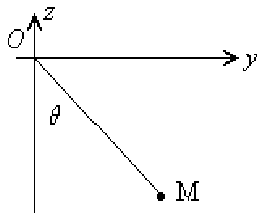


Fig.1

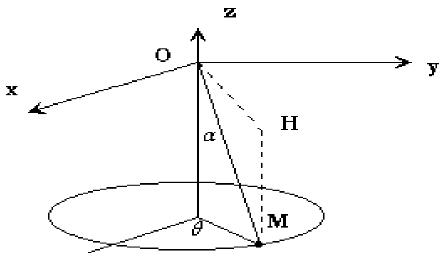


Fig.2

Exo 1 : Pendule conique.
L'extrémité O d'un fil OM de masse négligeable et de longueur l est fixée. Un objet ponctuel de masse m est suspendu en M(Figure.2).
L'objet est écarté de la verticale d'un angle α de la verticale puis lancé.
Par application de la relation fondamentale de la dynamique, déterminer la vitesse initiale qu'il faut communiquer à M pour qu'il décrive des cercles horizontaux.

Exo 2 : Mouvement d'une sphère dans un liquide.
Une pièce sphérique homogène S, de masse m et de rayon a, pénètre verticalement dans un bassin de stockage, rempli sur une hauteur h, d'un liquide de masse volumique μ .
Le centre de la pièce " plonge " à l'instant $t = 0$ en O, à la distance a de la surface libre du liquide à l'intérieur du bassin, avec une vitesse verticale de plongée vo.
On tiendra compte de la force de viscosité de norme f opposée au déplacement et proportionnelle à la vitesse de S (k est une constante positive). On rappelle que la poussée d'Archimède est égale et opposée au poids du volume de liquide déplacé.
On donne :
$m = 1{,}4$ kg ; $a = 3{,}5$ cm ; $\mu = 860$ kg.m^{-3} ; $k = 0{,}5$ SI ; $vo = 2$ m/s ; $g = 9{,}8$ m.s^{-2}.

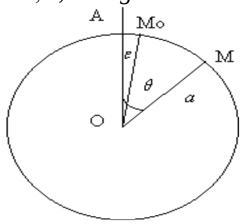
1) Ecrire l'équation $v(t)$ de l'évolution au cours du temps de la vitesse du centre G de S dans le liquide en faisant intervenir la vitesse limite v_L de S. On sera amené à réfléchir sur le signe de la composante de la vitesse suivant l'axe Oz.
2) Déterminer la loi $z(t)$ du déplacement vertical de S dans le liquide, comptée à partir de O.
3) Montrer que le temps T, mis par la pièce pour se mouvoir de O jusqu'au fond du bassin, obéit à une équation du second degré si on se contente d'un développement limité de exp x limité au second ordre.

On donne : $\exp x = 1 + x + x^2/2$ pour $x \ll 1$.

4) Calculer T avec le fond du bassin rempli d'une hauteur de liquide $h = 2{,}35$m ?

Exo 3 : Lancement d'un projectile. Force de frottement.
On lance un projectile, supposé ponctuel, de masse m, depuis un point O, avec une vitesse initiale v_o faisant un angle α avec l'horizontale notée Ox. Cet objet est soumis en plus de son poids à une force de frottement opposée à la vitesse et de valeur $F = hv$ avec $h > 0$.
On note g l'intensité de la pesanteur.
Montrer que la trajectoire de ce projectile peut se mettre sous la forme :
$z(x) = K_1 x + K_2 \ln(1 - K_3 x)$
Déterminer les constantes K_1, K_2 et K_3.

Exo 4 : Mouvement d'un point sur une sphère.
On lâche sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$ un point matériel de masse m en un point Mo de la face convexe d'une sphère de centre O et de rayon a sur laquelle il est susceptible de glisser sans frottement
Déterminer, en n'appliquant que la relation fondamentale de la dynamique, la réaction du support en fonction de θ, ε, m et g.



Exo 5 : Etude d'un mouvement à force centrale avec amortissement.

Un point P, de masse m, repéré par ses coordonnées polaires $r = OP$ et $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OP})$, se déplace, sans frottement, sur un plan horizontal. Ce point est lancé dans le plan xOy à partir de Po, de coordonnées cartésiennes (0, a) dans un champ de force $\vec{F} = -k\overrightarrow{OP}$, et subit, en outre, une force résistante proportionnelle à sa vitesse : $\vec{F}' = -b\vec{v}$ b et K sont des constantes positives
1. Etablir en coordonnées polaires (r, θ) les équations différentielles du mouvement de P.
2. En déduire dans le cas où la vitesse angulaire ω est constante :
l'équation horaire $r(t)$ en fonction de a, b, m et t.
la vitesse angulaire ω en fonction de K, m et b.

anouar-cpge.ifrance.com