Question de cours

1) définir les référentiels de Copernic, de Kepler, géocentrique R_o, terrestre R_T.
2) Déterminer, en fonction de la latitude λ, l'angle α que fait le vertical de lieu avec le champ de gravitation terrestre, en un point M à la surface de la Terre.

Exercice N°1 :

On considère un repère terrestre Axyz orthonormé direct avec A au niveau du sol en un lieu de latitude λ=48°N, Az la verticale ascendante, Ax horizontale vers le sud (figure 2). On désigne par g le champ de pesanteur.

La terre est supposée sphérique, en rotation uniforme autour de l'axe des pôles avec une vitesse angulaire $\Omega=7{,}3.10^{-5}$rad.s^{-1}.

On tire un boulet de canon verticalement vers le haut avec une vitesse initiale V_0. La résistance de l'air sera négligeable.

La force d'inertie d'entraînement est incluse dans le poids

Pour les applications numériques, on prendra g=10m.s^{-2}, V_0=100m.s^{-1}.

L'expérience a été réalisée au 17ème siècle par le Père Mersenne.

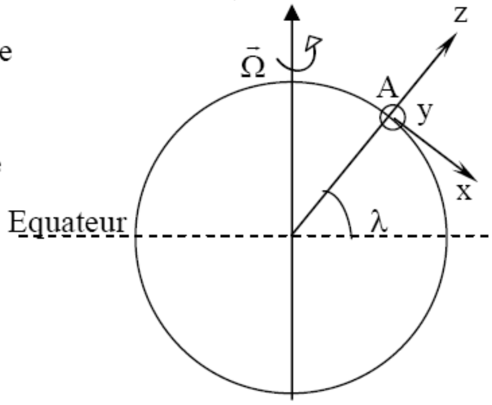


Figure 2

1. Le référentiel terrestre est supposé galiléen :
   a. En appliquant la R. F. D, Déterminer la vitesse du boulet en fonction du temps.
   b. En déduire l'équation horaire du mouvement.
   c. A quel instant le boulet retombe t-il sur le sol et en quel point ?

2. Le référentiel terrestre n'est plus considéré galiléen. On s'intéresse seulement au force de Coriolis.

   a. Ecrire la relation fondamentale de la dynamique et montrer qu'il s'ajoute au poids une force qui se comporte comme un terme correctif.

   b. Montrer que l'expression de la composante de l'accélération du boulet suivant l'axe Ay s'écrit : $a_y = -2\,\Omega(V_0 - g\,t)\cos\lambda$.

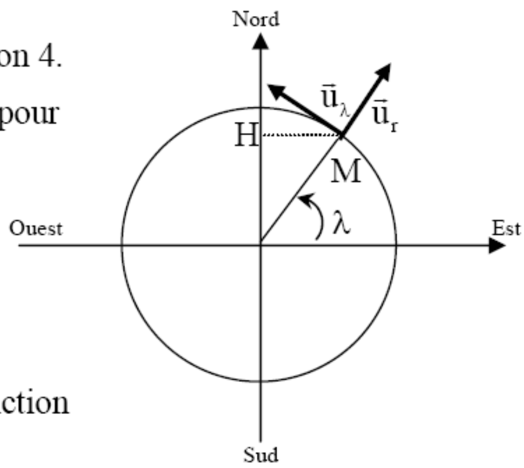
   c. En tenant compte des conditions initiales, déterminer y(t).

   d. Calculer l'endroit où le boulet retombe. On donnera un résultat littéral puis on fera une application numérique.

Exercice N°1 ***Effet de la force d'inertie d'entraînement : variation de l'accélération de la pesanteur avec la latitude :***

Presque dans toutes les applications, on suppose que tout référentiel lié à la terre comme galiléen. Mais en réalité la terre tourne sur elle même autour de son axe SN, par rapport au référentiel de Copernic, à raison de un tour en 86164s.

1. Calculer la valeur de la vitesse angulaire ω.
2. Considérons un point matériel M de masse m, situé à la surface de la terre (assimilée à une sphère de centre O et de rayon R).
   a. Quel est le sens de rotation de la terre autour de son axe de rotation SN ?
   b. Soit λ l'angle que fait le rayon vecteur $\overline{OM}$ avec le plan de l'équateur.
      i- Si la terre ne tourne pas, quelle est son action sur le point M ? Ceci en négligeant l'attraction qu'exercent les autres astres sur M.
      ii- Comme la terre tourne, que devient cette action ? Ecrire la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel lié à la terre.
3. Exprimer la force d'inertie d'entraînement en fonction de $\overline{HM}$; tel que H étant la projection orthogonale de M sur l'axe (Oz).
4. Calculer $\vec{g}$ (accélération de pesanteur apparente) en fonction de $\vec{g}_0$ (accélération de pesanteur si la terre était fixe) et $\overline{HM}$.
5. Est-ce que la direction du fil à plomb est donné par $\vec{g}$ ou par $\vec{g}_0$? Justifier votre réponse.



6. $\vec{g}$ s'écrit sous la forme $\vec{g}_0 + \Delta\vec{g}$ d'après la question 4.
   a. Calculer numériquement $g_0 = \|\vec{g}_0\|$ et $\Delta g = \|\Delta\vec{g}\|$ pour $\lambda = 0$ car dans ce cas, on a $\|\Delta\vec{g}\|$ maximum.

On donne $G = 6{,}67.10^{-11}$S.I, $M_T = 6.10^{24}$Kg, R=6390Km.

   b. Calculer $\dfrac{\Delta g}{g}$ avec $g = \|\vec{g}\|$. Conclure.
7. En adaptant les coordonnées sphériques.
   a. Exprimer les composantes g_r et g_λ de $\vec{g}$ en fonction de ω, R, λ et g_0.
   b. Calculer l'angle que fait la verticale du lieu avec le rayon terrestre : c'est-à-dire $\vec{g}$ avec $\vec{g}_0$, notons α cet angle. Faire l'application numérique avec $\lambda = 45°$. Conclure pour quelle valeur de λ l'angle α est maximum ?
8. Peut-on approximer g par g_r.

Montrer que g s'écrit sous la forme $g = g_E(1 + a\sin^2\lambda)$ avec g_E est la valeur de g pour $\lambda = 0$ et a est une constante à déterminer.

En pratique, la mesure de g_E donne $g_E = 9{,}7805 m.s^{-2}$, ce qui permet de trouver a. Calculer a.

9. L'expérience montre que les variations de l'intensité de pesanteur sont correctement représentées par la relation $g = g_E(1 + a\sin^2\lambda)$ avec a prend une valeur numérique $a_{exp} = 5{,}29.10^{-3}$.
   a. Comparer a_{cal} avec a_{exp}.
   b. Expliquer l'écart entre les deux valeurs.

Exercice N°2 *Effet de la force d'inertie de Coriolis : chute libre :*

Le référentiel lié à la terre n'est pas galiléen. On considère un point matériel M, de masse m, en mouvement de chute libre au voisinage de la surface terrestre.

1. Quelles sont les forces qui agissent, dans le référentiel lié à la terre, sur le point M ?
2. Le point matériel, sans vitesse initiale par rapport à la terre, en un lieu de latitude λ et d'une altitude h au-dessus du sol. A t=0s, M se trouve en M_0.

Ecrire la relation fondamentale de la dynamique dans $R(O_1, x, y, z)$ référentiel lié à la terre.

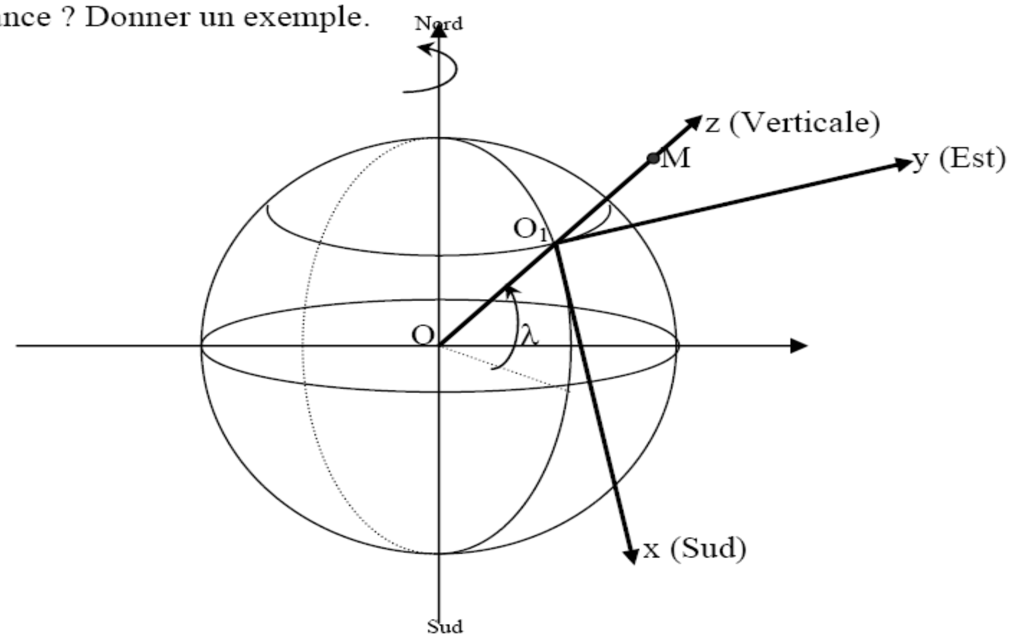
3. En négligeant l'angle α entre $\vec{g}$ et $\vec{g}_0$, projeter la relation fondamentale de la dynamique sur les axes O_1x, O_1y, O_1z.
4. Intégrer une seule fois ces équations, en tenant compte des conditions initiales.
5. En utilisant des questions 3 et 4, écrire l'équation différentielle vérifiée par y seulement. Intégrer cette équation et démontrer que : $y = g_0 \dfrac{\cos\lambda}{2\omega}\left(t - \dfrac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right)$.

Comparer la période avec le temps de chute t_c. Que devient alors y ? Conclure.

6. Calculer dans les mêmes conditions x. Le signe de x dépend-t-il de λ (c'est-à-dire de l'hémisphère nord et de l'hémisphère sud).
7. Calculer z. En déduire le temps de chute t_c.

(En calculant z, on peut tenir compte de la comparaison suivante $2\omega y \ll g t_c$).

8. L'effet de la force de Coriolis négligeable dans la plupart des cas. Dans quel cas cet effet prend son importance ? Donner un exemple.



N. B : Développement limité : $\begin{cases} \sin 2\omega t \approx 2\omega t - \dfrac{(2\omega t)^3}{6} \\ \cos 2\omega t \approx 1 - \dfrac{(2\omega t)^2}{2} \end{cases}$

Exercice N°4:Analyse complète du mouvement d'un pendule de Foucault

On considère un pendule simple constitué d'une masse lotte A. (masse m = 30 kg) suspendue à l'extrémité inférieure d'un filin de longueur 1 = 67 m. L'autre extrémité est fixée en un point O_l placé à une hauteur égale à 1 sur la verticale du lieu de latitude λ.

1. Expliciter l'équation du mouvement dans la base du référentiel terrestre local R = Oxyz, Oz étant la verticale ascendante et Ox l'axe local orienté vers l'est. On exprimera la tension du fil sous la forme $\vec{T} = -T\overrightarrow{O1A} / l$.
2. En négligeant les mouvements verticaux. Trouver les équations différentielles suivantes qui régissent le mouvement dans le plan horizontal :

$$\ddot{x} - 2\Omega\dot{y}\sin\lambda + \omega_o^2 x = 0 \text{ et } \ddot{y} - 2\Omega\dot{x}\sin\lambda + \omega_o^2 y = 0$$

Ω étant la vitesse de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles et $\omega_o^2 = g/l$.)
3. Résoudre le système d'équations différentielles précédent. Sachant qu'initialement $x = x_m$, $y = 0$, $\dot{x} = 0$ et $\dot{y} = o$. On utilisera la méthode complexe en posant $\underline{x} = x + jy$ avec $j^2 = -l$,
4, Quelle est la forme de la solution dans le système d'axes tournant autour de la verticale avec la vitesse angulaire $\Omega \sin\lambda$ dans le sens nord-est-sud-ouest? En déduire la durée T d'un tour complet de ce système d'axes tournants. Calculer T pour différentes latitudes: $\lambda = 90°$ (pôles), $\lambda = 43^0 35'$ (Toulouse) et $\lambda = o°$ (équateur).

Exercice 5 : Pendule simple dans différents référentiels

Un pendule simple est formé d'un fil inextensible, de longueur l. dont une extrémité porte une masselotte A de masse m et l'autre H est fixée au bâti lié à un référentiel R. Ce référentiel est rapporté à une origine 0 et à une base orthonormée directe $(\vec{ex}, \vec{ey}, \vec{eZ})$, $\vec{ez}$ étant vertical ascendant . Dans le plan vertical du mouvement OyZ, la position de A est caractérisée par le paramètre angulaire $\theta = (-\vec{ez}.\overrightarrow{HA})$. On note $\vec{g} = -g\,\vec{ez}$. avec 9 = 9.81 m·s-^{2}. Le champ de pesanteur terrestre.

1 . Pendule simple dans un référentiel terrestre $R = R_1$,

a) Exprimer. en fonction de θ et de ses dérivées. l'énergie cinétique de A.
b) Trouver, en fonction de θ, l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur Ep. On prendra comme origine sa valeur à $\theta = 0$.
c) En déduire l'équation différentielle du mouvement en θ.
d) Discuter, à partir du graphe Ep (θ), la nature du mouvement suivant les valeurs de l'énergie mécanique E_M.
e) Étudier le cas des petits mouvements. Quelle est leur période T_1, Application numérique: l = 1 m.

2. Pendule simple dans R_2

Le référentiel $R = R_2$ par rapport auquel on étudie le mouvement du pendule a un mouvement de translation, rectiligne et uniforme par rapport à R_1 suivant l'axe des y.
a) Établir l'équation différentielle du mouvement en θ à partir du théorème du moment cinétique appliqué en H dans R_2·
b) Comparer la période T_2 des petites oscillations du pendule dans R_2 à T_1. Pouvez-vous justifier sans calcul le résultat obtenu

3. Pendule simple dans R_3

Le référentiel R. = R_3 par rapport auquel on étudie le mouvement du pendule à un mouvement de translation d'accélération $\overrightarrow{\mathbf{a3}}$ par rapport à R_1.
a) Établir le bilan des forces qui s'exercent sur A dans R_3, En déduire que, dans ce référentiel, tout se passe comme si l'on pouvait remplacer le champ de pesanteur $\vec{g}$ par un champ de pesanteur apparent $\overrightarrow{g_a}$ que l'on exprimera en fonction de g et a_3.
b) Que se passe-il pour $\overrightarrow{a3} = \vec{g}$ Ce cas présente un intérêt en astronautique. Savez-vous comment on le réalise dans un avion
c) L'accélération $\overrightarrow{a3}$ est dirigée suivant l'axe horizontal Oy et sa norme est g/2 : $\overrightarrow{a3} = (g/2)\overrightarrow{ey}$.
Montrer que l'énergie de potentielle apparente s'écrit, en adoptant comme origine sa valeur à $\theta = 0$:

$$E_p^a = C\,(1 - \cos\theta + 1/2 \sin\theta\,)$$

C étant une constante dont on donnera la dimension physique et que l'on déterminera en fonction de m, g et l. Trouver, à partir de la fonction $E_p^a(\theta)$, la position d'équilibre stable θ_e du pendule. Calculer θe·

En développant l'énergie potentielle E_p^a autour de la position d'équilibre $\theta = \theta$e, établir l'expression de la période T_3 des petites oscillations en fonction de l, get cos θ_e. Ce résultat peut être obtenu très rapidement à partir de la norme du champ de pesanteur apparent. Comment ? Calculer T_3.