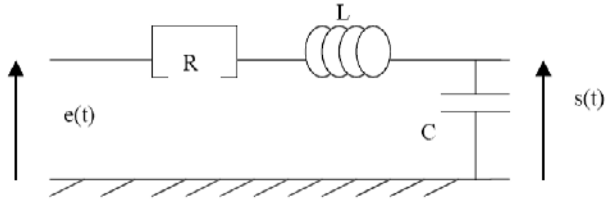
PARTIE 1 : LE FACTEUR DE QUALITE EN ELECTROCINETIQUE : ETUDE D'UN FILTRE PASSIF.

On étudie le circuit linéaire ci-dessous.
Il est composé de trois dipôles en série : une résistance R, une inductance parfaite de coefficient d'induction L, et d'un condensateur de capacité C.



Il est soumis à une tension d'entrée sinusoïdale $e(t) = E_m \cos(wt + \varphi)$. On note $s(t)$ la tension de sortie.
En notation complexe, on notera, pour e(t) par exemple, $\underline{e} = \underline{E_m} e^{jwt} = E_m e^{j\varphi} e^{jwt}$ avec $\underline{E_m}$, l'amplitude complexe.

1. A l'aide de deux schémas équivalents du circuit, l'un en hautes fréquences, l'autre en basses fréquences, donner la nature de ce filtre.

2. Fonction de transfert
   a. Etablir la fonction de transfert de ce filtre sous la forme :
   $$\underline{H}(jw) = \frac{1}{1 + j\frac{1}{Q}\frac{w}{w_0} + (j\frac{w}{w_0})^2} \text{ avec } w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q = \frac{Lw_0}{R} = \frac{1}{RCw_0}$$
   Donner l'ordre de ce filtre.

   b. Si e(t) est une fonction quelconque du temps (non sinusoïdale), quelle est l'équation différentielle entre les fonctions s(t) et e(t) ?
   Pour quelle raison peut-on affirmer la convergence du régime transitoire ?

3. Exprimer le module de la fonction de transfert $|\underline{H}(jw)|$, en fonction de w, w_0 et Q.

4. Montrer que $|\underline{H}(jw)|$ passe par un maximum pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Comment appelle-t-on ce phénomène ? Déterminer, w_r, la pulsation correspondant à ce phénomène, en fonction de w_0 et Q.

5. On appelle gain, la fonction G_{dB}, telle que $G_{dB} = 20\log|\underline{H}(jw)|$.
   Donner les équations des asymptotes de G_{dB} aux basses fréquences et aux hautes fréquences.
   Exprimer $G_{dB}(w = w_0)$.

6. Tracer l'allure du diagramme de Bode en gain pour $Q = 10$ et $Q = \frac{1}{10}$ sur la feuille de papier semi-logarithmique fournie.
   On définit les pulsations de coupures (w_c) d'un filtre par la relation : $|H(jw_c)| < \frac{|H(jw)|_{max}}{\sqrt{2}}$.
   Justifier que la bande passante est alors définie à -3dB et placez-la sur les graphes.

7. Interprétation énergétique du facteur de qualité Q.

On suppose $Q >> 1$.

a. Montrer que si $w = w_0$, alors $i(t) = I_{max}\cos(w_0 t)$.

b. Déterminer alors $u_c(t)$, la tension aux bornes du condensateur en fonction de C, w_0 et I_{max}.

c. On note ΔW, l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance sur une période.

Montrer que $\Delta W = \frac{\pi R I^2{}_{max}}{w_0}$.

d. On note W_m, l'énergie maximale reçue par le condensateur.

Montrer que $W_m = \frac{I_{max}{}^2}{2Cw_0{}^2}$.

e. En déduire que $Q = 2\pi \frac{W_{max}}{\Delta W}$.