

On se propose d'étudier un dispositif permettant la commande, à distance, de la position angulaire d'une pièce (CH) (charge mécanique), mobile autour d'un axe Δ . (Exemple : orientation d'une antenne de radar, d'un gouvernail de bateau, d'une gouverne d'avion).

Le schéma est celui de la figure 1. Le dispositif comprend :

- un moteur à courant continu (M) dont le rotor entraîne la charge mécanique (CH) ;
- deux potentiomètres rotatifs identiques : de commande (P_c) et d'asservissement (P_a) ;
- un amplificateur différentiel de tension (A), de gain G_0 , dont les bornes d'entrées sont reliées aux curseurs C et C' des potentiomètres;

Les potentiomètres sont alimentés entre A et B (ou A' et B') par la source de tension continue E. La résistance totale, entre A et B (ou A' et B') de chaque potentiomètre est R_0 .

Pour le potentiomètre de commande P_c le curseur C peut balayer un angle $\theta_c = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ compris entre 0 (si C est en B) et $\theta_m = 360^\circ$ (si C est en A). De même pour (P_a) : $\theta = (\overrightarrow{O'B'}, \overrightarrow{O'C'})$.

Les potentiomètres sont linéaires : par exemple pour (P_c), la résistance R_{BC} entre B et C est proportionnelle à l'angle θ_c .

Le curseur O'C' est fixé à l'axe Δ du rotor et tourne avec lui : sa position $\theta(t)$ sera également celle du rotor (sauf dans la partie D) ainsi que celle de la charge mécanique (CH) : **$\theta(t)$ est le signal de sortie;**

Un opérateur affiche l'angle souhaité en positionnant le curseur OC sur un cadran gradué en degrés. **$\theta(t)$ sera le signal de commande**, (ou signal d'entrée) du dispositif.

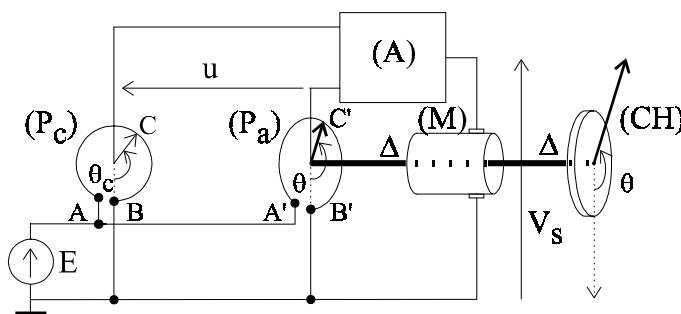


figure 1

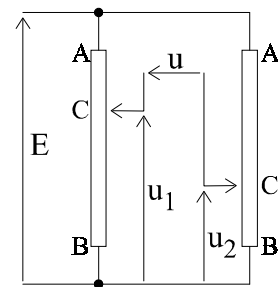


figure 2

A. ETUDE DES POTENTIOMETRES (figure 2)

1.

- a) Exprimer la résistance R_{BC} en fonction de R_0 , θ_c et θ_m ; idem pour $R_{B'C'}$ en fonction de R_0 , θ et θ_m .
- b) Exprimer la tension u entre C et C' en fonction de E, θ_c , θ et θ_m dans le cas où la résistance d'entrée de l'amplificateur est infinie.

2. L'amplificateur de différence (A) est maintenant, dans cette question, modélisé à l'entrée par une résistance R_e entre ses bornes d'entrée ; celles-ci sont supposées isolées par rapport à la masse (résistance infinie entre les bornes d'entrée et la masse).

a) Montrer que la tension calculée en 1.b) est divisée par un facteur de la forme : $1 + \frac{R_0}{R_e} f(\theta_c, \theta, \theta_m)$;

établir l'expression de la fonction $f(\theta_c, \theta, \theta_m)$. Montrer que la valeur maximale de la fonction f est 0.5 ; pour quelles valeurs des angles ?

b) Avec $R_0 = 1 \text{ k}\Omega$, quelle doit être la valeur minimale de R_e pour que la tension u soit donnée par la relation établie dans 1.b) à mieux que 1 % près quel que soit θ et θ_c ?

Pour la suite du problème on supposera cette condition réalisée

B. ETUDE DE L'AMPLIFICATEUR (A)

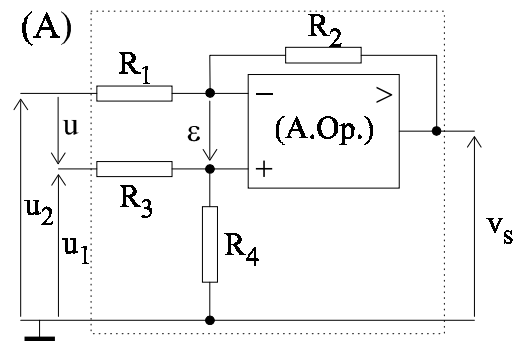


figure 3

1. L'amplificateur de différence (A) est celui de la figure 3. L'amplificateur opérationnel (A.Op.) est supposé idéal dans cette question .

a) On souhaite obtenir un gain G_0 donnant en sortie la tension $V_s = G_0 u$. Etablir deux conditions reliant R_1 , R_2 , R_3 , R_4 et G_0 .

b) Calculer les quatre résistances si on impose : $R_1 + R_2 = R_3 + R_4 = 110 \text{ k}\Omega$ et $G_0 = 10$.

2. Pour étudier le comportement de (A) en régime transitoire, on modélise l'amplificateur opérationnel par un système du premier ordre caractérisé par :

$$\tau \frac{dv_s}{dt} + v_s = \mu_0 \varepsilon$$

τ est la constante de temps, μ_0 le gain différentiel et ε la tension différentielle à l'entrée de l'amplificateur opérationnel.

a) Etablir l'équation différentielle liant $V_s(t)$ à $u(t)$, en fonction des paramètres τ , μ_0 et G_0 . Simplifier l'équation dans le cas pratique où $G_0 \ll \mu_0$ et donner l'expression de la constante de temps τ' de l'amplificateur (A), en fonction de τ , G_0 et μ_0 .

b) Le comportement fréquentiel de l'amplificateur (A) est traduit par la fonction de transfert $\underline{G}(j\omega)=\underline{V}_s/\underline{u}$ (représentation complexe classique en régime permanent sinusoïdal de pulsation ω). Etablir l'expression de $\underline{G}(j\omega)$.

c) $\tau=0,01$ s ; $\mu_0=10^5$; $G_0=10$.

Calculer τ' et la fréquence f_c de l'amplificateur.

Il ne sera pas nécessaire de tenir compte de cette constante de temps pour la commande ultérieure ; pourquoi à votre avis ?

On supposera donc par la suite que $v_s=G_0u$ (G_0 réglable).

Remarque : un deuxième amplificateur, non représenté, de gain en tension unité, donne au signal la puissance nécessaire pour le fonctionnement du moteur, il n'interviendra pas dans le traitement des signaux et n'est pas représenté par la suite.

C. ETUDE DU MOTEUR ET DE LA REponse DU SYSTEME ASSERVI

Après amplification en puissance, la tension V_s alimente le moteur (M). On admet que son fonctionnement est traduit par sa caractéristique donnant le moment Γ du couple qui s'exerce sur le rotor en fonction de la tension d'alimentation V_s et de la vitesse angulaire Ω du rotor par : $\Gamma=\alpha V_s-\beta\Omega$ (1) ; α et β sont des constantes positives caractérisant le moteur.

1. Pour interpréter la signification physique de la relation (1), on considère le modèle simplifié de moteur continu : MN est un élément conducteur de longueur L , de résistance r parcouru par un courant d'intensité i , se déplaçant avec une vitesse \vec{v} constante dans un champ magnétique uniforme \vec{B} (figure 4), les trois directions de \vec{MN} , \vec{v} et \vec{B} seront supposées orthogonales entre elles.

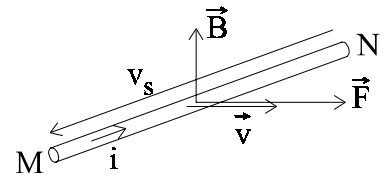


figure 4

Etablir la relation donnant la force motrice $F=||\vec{F}||$ en fonction de la tension $V_s=V_M-V_N$ et de la vitesse $v=||\vec{v}||$. Comparer avec la relation (1) ; sur quels paramètres peut-on jouer pour fixer les constantes α et β du moteur ?

2. Le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ de toutes les parties mobiles (rotor, charge et curseur O'C') est J . On néglige toute autre action mécanique que celle représentée par le couple qui s'exerce sur le rotor. Ecrire l'équation différentielle liant $\theta(t)$ à $\theta_c(t)$.

3. Initialement $\theta(0)=\theta_c(0)=0$ et tout est au repos. A $t = 0$, l'opérateur donne à θ_c une valeur θ_1 constante en un temps pratiquement négligeable.

a) Montrer que, suivant les valeurs de G_0 , le mouvement transitoire de (CH) aura un régime différent. On précisera la valeur critique G_c de G_0 et on donnera, sur un même graphe l'allure de $\theta(t)$ pour les trois régimes : $G_0 < G_c$, $G_0 = G_c$ et $G_0 > G_c$.

Indiquer pourquoi le meilleur choix de G_0 est égal ou proche de G_c si on veut que la charge se positionne le plus vite possible dans la position θ_1 . Quelles seraient les conséquences d'un choix de G_0 très supérieur à G_c ? ou très inférieur à G_c ?

Par la suite on choisira $G_0=G_c$ (régime critique)

b) Donner la solution complète $\theta(t)$; on posera $T_c=2J/\beta$ (T_c =temps caractéristique du dispositif).

c) On appelle temps de réponse à 5 %, le temps T_r au bout duquel on a : $\frac{\theta_1 - \theta}{\theta_1} < 0,05$. Etablir l'équation donnant T_r .

d) Application numérique : $J=1 \text{ kg.m}^2$; $\alpha=30 \text{ mN.V}^{-1}$; $\beta=2 \text{ mN.s}$. Calculer T_c et déterminer une valeur approchée de T_r .

4. L'opérateur impose au curseur le mouvement donné par : $\theta_c=at$; montrer qu'en régime permanent la charge (CH) tourne avec la même vitesse, mais avec un retard constant T_d . Calculer littéralement et numériquement ce retard.

5. L'opérateur impose maintenant un mouvement sinusoïdal de période T : $\theta_c(t)=\theta_1+\theta_0\sin\omega t$ où $0<\theta_0<\theta_1$ et $\omega=2\pi/T$. En régime permanent le mouvement de la charge est de la forme : $\theta_c(t)=\theta_1+A(\omega)\sin[\omega t-\varphi(\omega)]$.

a) Dans le cas $G_0=G_c$, établir $A(\omega)$ et $\varphi(\omega)$, en fonction du paramètre T_c . Tracer l'allure de $A(\omega)$.

b) Pour quelles périodes T , l'écart relatif entre $A(\omega)$ et θ_0 est-il inférieur à 5 % ?

D. MODIFICATION DU DISPOSITIF

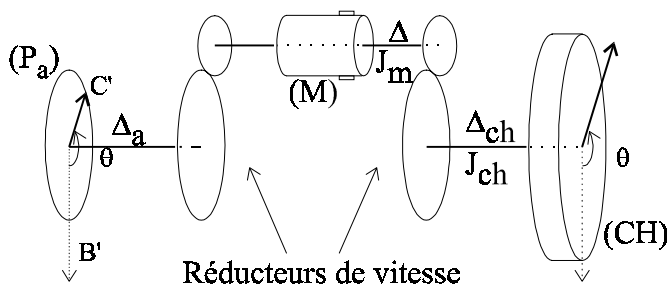


figure 5

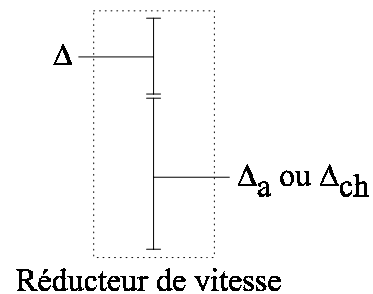


figure 6

Le moment d'inertie de la charge est en réalité beaucoup plus grand que celui étudié dans la partie C. On est amené à intercaler deux réducteurs de vitesse ⁽¹⁾ de même rapport n , l'un entre (M) et (P_a), l'autre entre (M) et (CH) (figures 5 et 6). Les axes de rotation Δ , Δ_a et Δ_{ch} étant orientés

¹ Un modèle simple de réducteur de vitesse est formé de deux roues dentées dont les rayons sont dans le rapport n .

convenablement, la vitesse de rotation Ω du rotor et celle de la charge et du curseur O'C' sont liées par : $\Omega = n d\theta/dt$.

On suppose que les réducteurs de vitesse fonctionnent sans perte énergétique (liaisons parfaites). Les moments d'inertie des pièces tournantes sont : J_m pour celles qui tournent autour de Δ et J_{ch} pour celles qui tournent autour de Δ_{ch} . On néglige le moment d'inertie des pièces tournant autour de Δ_a .

On note Γ_{ch} le moment du couple qu'exerce le réducteur sur (CH) et Γ_m celui qu'il exerce sur le rotor.

1. Montrer que $\Gamma_{ch} = -n\Gamma_m$.
2. Ecrire le théorème du moment cinétique scalaire pour le solide mobile autour de Δ_{ch} , puis pour le solide mobile autour de Δ . Déduire la nouvelle équation différentielle liant $\theta(t)$ à $\theta_c(t)$. Comparer à celle obtenue dans la partie C. Montrer qu'on peut l'interpréter par une modification de J et α , donnant J' et α' , le coefficient β étant inchangé ; exprimer J' en fonction de J_m , J_{ch} et n , puis α' en fonction de α et n .
3. Comment sont alors modifiées les caractéristiques du dispositif : gain G'_c pour obtenir le régime critique, temps caractéristique T'_c , temps de réponse T'_r ... ?

E. REPRESENTATION DE L'ASSERVISSEMENT PAR UN SCHEMA FONCTIONNEL

Cette partie est indépendante des précédentes et n'utilise aucun des résultats établis, mais les notations sont les mêmes et elle concerne le même type de dispositif.

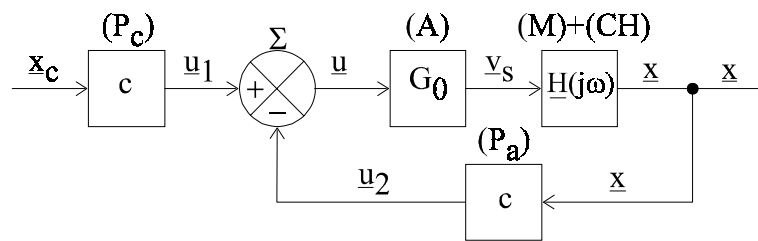


figure 7

La figure 7 donne un schéma fonctionnel du dispositif d'asservissement où chaque élément est représenté par un bloc "multiplication par une constante", sauf la partie mécanique "(M)+(CH)" dont la fonction de transfert a la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1 + j\omega\kappa)}$$

où K et κ sont des constantes réelles positives, caractéristiques du bloc "(M)+(CH)". Le gain G_0 de l'amplificateur (A) est supposé réglable. (P_c) et (P_a) sont des opérateurs "multiplication par la constante c ". x_c , x sont des signaux de commande et de sortie u_1 , u_2 , u et v_s des tensions électriques. Pour définir les fonctions de transfert on se place en régime sinusoïdal permanent de pulsation ω (notations complexes : \underline{x}_c , \underline{x} , \underline{u}_1 , \underline{u}_2 ... soulignées).

1. Etablir l'expression de la fonction de transfert $\underline{T}(j\omega) = \underline{x}/\underline{x}_c$ du système complet ; elle sera mise sous la forme :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{1}{1 + 2j\eta \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{G_0 \omega^2}{H\omega_0 K}}$$

Donner η et ω_0 en fonction de G_0 , c , K et κ .

2. Pour obtenir un fonctionnement satisfaisant du dispositif d'asservissement on impose $\eta=1$. Déduire G_0 et montrer que ω_0 ne dépend alors que de κ .
3. Pour améliorer certaines performances du dispositif on peut intercaler entre (A) et (M)+(CH) un filtre électrique (F) dont la fonction de transfert a la Forme :

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{1 + j\omega\kappa}{1 + j\omega\gamma}$$

où $\gamma \ll \kappa$ (κ caractéristique du bloc "(M)+(CH)"). Quelle amélioration a-t-on obtenu?

4. Pouvez vous proposer un schéma simple de filtre utilisant deux résistances R et R' et une capacité C ?