Concours Commun Marocain		Session : 1991
Option : MM'	Epreuve de Physique	Durée : 4 h

PREMIER PROBLEME : MECANIQUE DES FLUIDES

1. On considère l'écoulement permanent d'un fluide incompressible (masse volumique μ) dans une canalisation horizontale ayant une symétrie de révolution et présentant un évasement (cf. figure I.1).

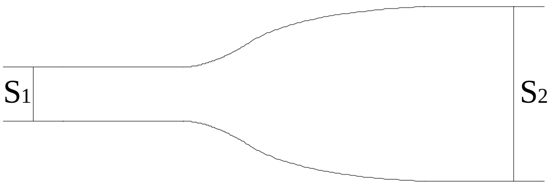

Figure I.1

Le régime d'écoulement est laminaire, irrotationnel et l'on pourra utiliser le modèle du fluide parfait. On supposera les divers champs (vitesse ϖ, pression p) uniformes sur les sections S_1 (en amont) et S_2 (en aval) de l'évasement et l'on négligera donc les variations d'altitude sur ces sections. Exprimer p_2 en fonction de p_1, v_1, v_2 et μ. Donner, en les justifiant soigneusement, deux expressions du débit volumique D dans la canalisation.

2. On considère l'écoulement permanent d'un fluide incompressible réel dans une canalisation présentant un brusque évasement (cf. figure I.2).

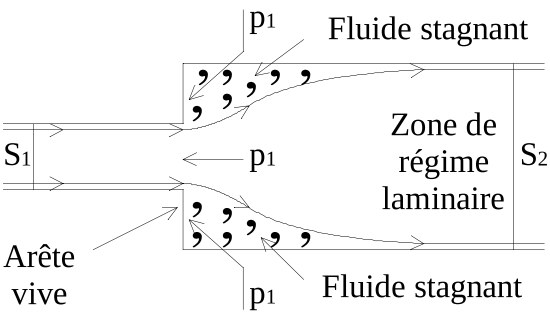

Figure I.2

Le fluide n'étant pas parfait, le théorème de Bernoulli ne s'applique pas ici ; néanmoins nous allons montrer que le modèle du fluide parfait et la connaissance expérimentale de l'allure du champ des vitesses permet d'en trouver une généralisation pour ce cas.

L'expérience montre que les lignes de courant extrêmes longeant la conduite dans sa partie étroite subissent un décollement au niveau de l'arête vive et ne rejoignent à nouveau la paroi qu'un peu plus loin. Ces lignes de courant constituent un tube à l'intérieur duquel on observe un régime laminaire ; entre ce tube et la paroi existe une zone de fluide stagnant (le fluide ne s'écoule presque pas) et dans laquelle apparaissent des tourbillons. L'existence d'un tel phénomène est due à la viscosité du fluide. Nous admettrons que la pression au niveau de l'évasement est p_1, y compris dans la zone de fluide stagnant.

a. En appliquant le théorème d'Euler au système ouvert constitué par le fluide à l'intérieur de la conduite entre les sections S_1 et S_2 et en négligeant les phénomènes de viscosité entre le fluide et la paroi, exprimer p_2 en fonction de p_1, v_1, v_2 et μ. Que devient l'expression du débit volumique D ?

b. A l'aide des résultats des questions 1. et 2.a., calculer la perte de pression (appelée aussi perte de charge) $\Delta p = p_2(\text{parfait}) - p_2(\text{réel})$ due à la discontinuité de section (théorème de Bélanger). On l'exprimera en fonction de μ, v_1 et v_2.

c. En remarquant que Δp représente l'énergie volumique perdue par le fluide réel dans l'évasement, trouver, à l'aide d'un raisonnement élémentaire, l'expression de la puissance perdue dans l'évasement. Où et comment est dissipée cette puissance ?

d. Montrer que Δp peut s'écrire sous la forme : $\Delta p = \frac{1}{2} C \mu v_1^2$ et calculer le coefficient de perte singulière C.

Une perte de charge due à une "singularité" (évasement, rétrécissement, coude, vanne...) est appelée perte de charge singulière. Nous admettrons que toute perte de charge singulière peut s'écrire sous la forme $\Delta p=\frac{1}{2}C\mu v^2$, v étant la vitesse au niveau de la singularité ; C dépendant essentiellement de la géométrie de

la singularité. Pour un <u>évasement</u>, v est la vitesse <u>avant</u> l'évasement ; pour un <u>rétrécissement</u>, v est la vitesse <u>après</u> le rétrécissement.

e. Soit une conduite présentant, entre deux points A et B, n singularités (supposées suffisamment espacées pour être considérées comme indépendantes) de coefficients de pertes singulières C_i (i variant de 1 à n). On notera v_i la vitesse au niveau de la $i^{\text{ième}}$ singularité. Les dimensions verticales de la conduite entre deux singularités n'étant pas négligeables, on devra tenir compte de la pesanteur. On peut généraliser le théorème de Bernoulli en présence de pertes de charge singulières en écrivant que la pression réelle en B est diminuée de Δp par rapport à celle obtenue pour un fluide parfait. Montrer que l'expression généralisée du théorème de Bernoulli tenant compte des pertes de charge singulières s'écrit :

$$p_a+\mu(\frac{1}{2}v_a^2+gz_a)=p_b+\mu(\frac{1}{2}v_b^2+gz_b)+\frac{1}{2}\mu\sum_{i=1}^{n}C_iv_i^2$$

3. <u>Application</u> : On effectue le transvasement d'un liquide depuis un récipient (a) vers un récipient (b) à travers une conduite (entre deux points E et S) présentant une vanne et deux coudes (cf. figure I.3).

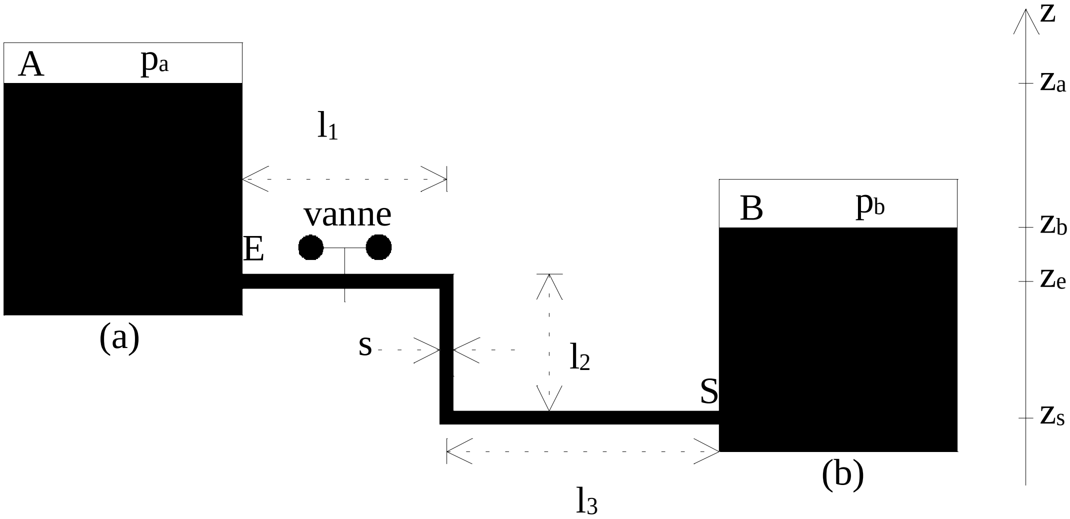

Figure I.3

On suppose le régime permanent établi. On négligera les dimensions de la section s (constante) de la conduite devant celles des récipients. On appelle z_a et z_b les côtes des surfaces libres, p_a et p_b les pressions du gaz dans (a) et (b).

a. Calculer la vitesse v du liquide dans la conduite ainsi que le débit volumique D de l'écoulement (expressions littérales et valeurs numériques).
On donne :
C(entrée)=0,5 ; C(vanne)=3 ; C(coude)=0,5 ; C(sortie)=1 ;
p_a=3 bar ; p_b=1 bar ; μ=1000 kg.m^{-3} ;
s=50 cm^2 ; g=10 m.s^{-2} ; z_a-z_b=3 m

b. Calculer la puissance dissipée dans la vanne.

c. Exprimer littéralement les pressions en E et S en fonction respectivement de z_a-z_e et z_b-z_s. On admettra que la pression dans la zone située juste avant la singularité est constante ; la perte de charge n'ayant lieu qu'après le passage de la singularité.

d. Montrer que la résultante des actions de pression de l'air extérieur (p_0=1 bar) sur la conduite est nulle. Calculer la résultante des actions de pression du liquide sur la canalisation. On ne négligera pas le poids du liquide.
On donne : l_1=1,5 m ; l_2=2 m ; l_3=4 m.

DEUXIEME PROBLEME : ELECTRONIQUE

1. Circuit à capacité commutée

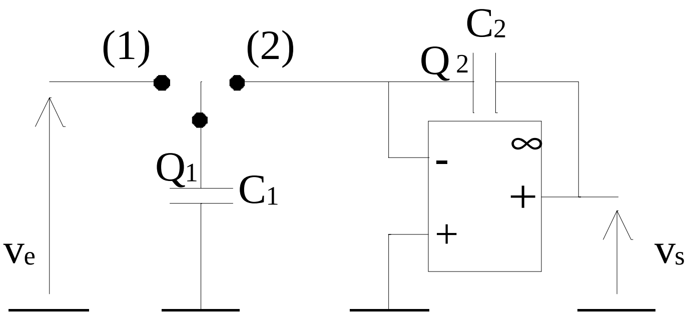

Figure II.1

On considère le circuit de la figure II.1. L'amplificateur opérationnel sera supposé idéal. On négligera la résistance interne du générateur de commande délivrant la tension $v_e(t)$. On notera $Q_1(t)$ et $Q_2(t)$ les charges des armatures de C_1 et C_2 comme indiqué sur le schéma. L'interrupteur est commandé par une horloge de fréquence f_h (période T_h =1/f_h) ; son fonctionnement au cours d'une période d'horloge (avec origine des temps au début d'un cycle) est le suivant :

$t\in[0,T_0]$	interrupteur ouvert
$t\in[T_0,T_h/2]$	intervalle de durée T_f, interrupteur fermé en 1
$t\in[T_h/2,T_h/2+T_0]$	interrupteur ouvert
$t\in[T_h/2+T_0,T_h]$	intervalle de durée T_f, interrupteur fermé en 2

a. A l'instant $t=nT_h$ (n entier) écrire les relations liant $v_e(t)$, $v_s(t)$, C_1, C_2, $Q_1(t)$ et $Q_2(t)$.

b. A l'instant $t+T_h/2$ écrire les relations liant $v_e(t)$, $v_s(t)$, C_1, C_2, $Q_1(t+T_h/2)$ et $Q_2(t+T_h/2)$.

c. Trouver une relation liant $v_e(t)$, $v_s(t)$, $v_s(t+T_h/2)$, C_1 et C_2.

d. Que vaut $v_s(t+T_h)$?

e. En supposant T_h suffisamment faible pour le considérer comme tendant vers 0, exprimer la relation $v_s=f(v_e,C_1,C_2,f_h)$; quelle est la fonction réalisée ? Exprimer la fonction de transfert $\underline{H}_0$ de ce circuit. Evaluer la charge transmise à C_2 par la capacité C_1 au cours d'un cycle d'horloge et en déduire le courant imposé par la capacité commutée vers le circuit à amplificateur opérationnel. A quel équivaut la capacité commutée ? Retrouver la valeur du dipôle en examinant $\underline{H}_0$.

Remarque : Nous admettrons que, pour un signal d'entrée harmonique de fréquence f, l'approximation faite convient si l'on prend $f_h \geq 100f$.

2. Influence de la résistance interne du générateur de commande

a. On étudie le circuit RC de la figure II.2 alimenté par un générateur de tension e(t) de sorte que :

- pour $t<0$ $e(t)=0$ et $u(t)=0$
- pour $t \geq 0$ $e(t)=E+At$

où E et A sont des constantes

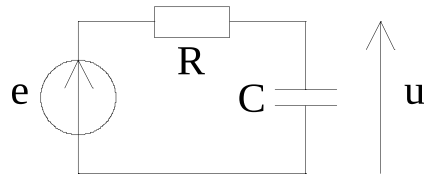

Figure II.2

Montrer que la réponse s'écrit : $u(t)=(E-\tau A)[1-\exp(-t/\tau)]+At$.
On choisit t_1 tel que $\exp(-t_1/\tau)=5.10^{-3}$.
Montrer que pour $t>t_1$ l'erreur $\varepsilon=|u(t)-e(t)|$ est inférieure à $5.10^{-3}|E|+\tau A$.

b. On considère maintenant un générateur délivrant une tension sinusoïdale $e(t)=E_0\sin(2\pi ft)$. Celui-ci est branché sur le circuit RC précédent à partir d'un instant initial t_0 quelconque avec pour condition initiale $u(t_0)=0$. On considérera que, sur une durée $\Delta t<1/(100f)$, e(t) est approximativement linéaire, c'est-à-dire : $e(t) \# E+A(t-t_0)$. Donner les valeurs de $|E|_{max}$ et $|A|_{max}$.

c. On choisit d'observer la réponse à un instant $t \geq t_1$ (t_1 défini au a.). Pour quelle valeur maximale f_m de f, l'erreur ε est elle inférieure à 1% de l'amplitude maximale de e(t) ?

d. On souhaite pour le circuit étudié en 1. une déformation du signal inférieure à 1%. Calculer la durée minimale T_f de fermeture de l'interrupteur en 1 et la fréquence maximale f_m du signal d'entrée.
On donne : Résistance interne du générateur $R_g=100\ \Omega$; capacité $C_1=1$ nF.

3. Réalisation d'un filtre

Deux circuits de transfert $\underline{H}_0 = -\dfrac{1}{jk\omega}$, les grandeurs d'entrée et de sortie étant des tensions, sont insérés dans le montage de la figure II.3.

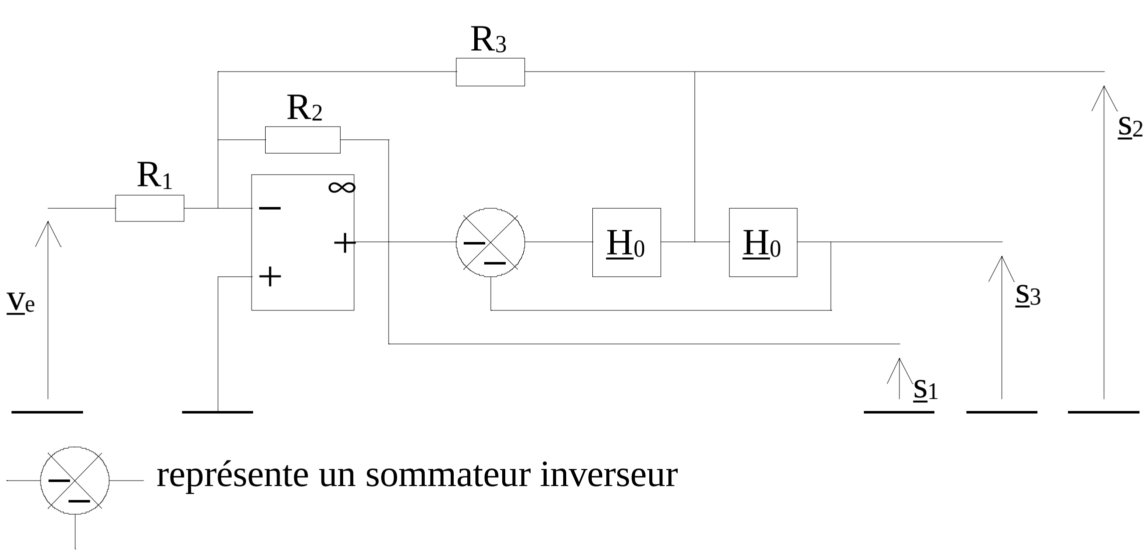

Figure II.3

a. Donner les fonctions de transfert $\underline{H}_1$, $\underline{H}_2$ et $\underline{H}_3$ entre l'entrée $\underline{v}_e$ et les sorties $\underline{s}_1$, $\underline{s}_2$ et $\underline{s}_3$.

b. Exprimer $\underline{H}_2$ sous la forme :

$$\underline{H}_2 = \frac{H_2^0}{\frac{1}{Q} + jx + \frac{1}{jx}}$$

où l'on a posé $x=f/f_c$; calculer f_c, $H^0{}_2$ et Q.
Tracer l'allure du diagramme de Bode pour le gain $G_2=20\log|\underline{H}_2|$. On prendra soin de préciser les asymptotes, le maximum, la bande passante à -3 dB ; on donnera l'allure dans les deux cas limites $Q\gg 1$ et $Q\ll 1$. Dans la suite on supposera $Q\gg 1$.

c. Les circuits de transferts $\underline{H}_0$ sont des filtres à capacité commutée du 1. Montrer que l'on peut choisir les capacités C_1 et C_2 de sorte que la relation $f_h \geq 100f$ soit automatiquement vérifiée dans la bande passante de ce filtre.

4. Application

a. On place, en série, deux filtres identiques de transfert $\underline{H}_2$, pilotés par la même horloge. Indiquer sans calculs la nature du filtre obtenu et l'intérêt de cette opération. Calculer le facteur de qualité $Q'=f_c/\Delta f'$ où $\Delta f'$ est la bande passante à -3 dB. Pour information, le circuit intégré MF10 de National Semiconductor comporte sur une même puce un tel ensemble de deux filtres calculés de telle sorte que $f_h/f_c=100$ et $Q=45$; valeurs que nous adopterons.

b. Pour observer la réponse d'un tel filtre à un signal $v_e(t)$ on est conduit à rajouter en série un filtre passe-bas de fréquence de coupure $f_b=10$ kHz. Pour quelle raison ?

c. On applique une tension v_e triangulaire de fréquence $f_0=100$ Hz. Lorsque l'on fait croître f_h depuis sa valeur minimale on observe des maxima successifs de l'amplitude du signal de sortie. Pour quelles valeurs de f_h sont-ils observés ? Quelles sont leurs amplitudes ? On appellera A l'amplitude du premier maximum.

On pourra utiliser le résultat suivant :
La fonction f de la variable t définie par :

- f est T-périodique (pulsation $\omega=2\pi/T$),
- f est paire,
- $f(t)=1-4t/T$ sur l'intervalle $[0,T/2]$

admet pour développement en série de Fourier :

$$f(t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\cos[(2p+1)\omega t]$$

FIN DE L'EPREUVE