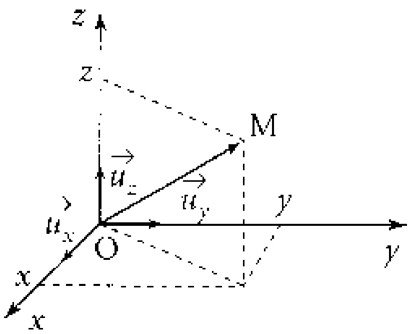
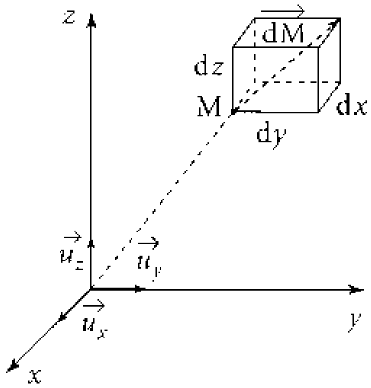
1° Systèmes de coordonnées et bases.

On considère un point *M* étudié dans un référentiel $\Re$. Le repère d'espace lié au solide de référence est d'origine *O* et d'axes orthogonaux *Ox*, *Oy*, *Oz*.

- **Base cartésienne.**





Les coordonnées de *M* sont *x*, *y*, z dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

Les vecteurs de cette base sont fixes par rapport au référentiel $\Re$ .Le vecteur position s'écrit :

$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$

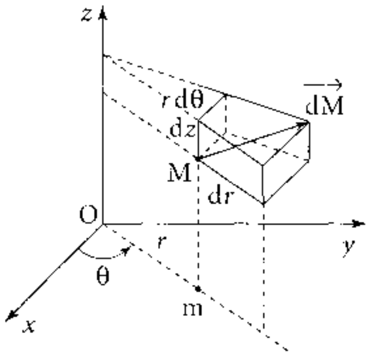
Un déplacement élémentaire du point *M* s'écrit $\overrightarrow{dM}$ ou $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$:

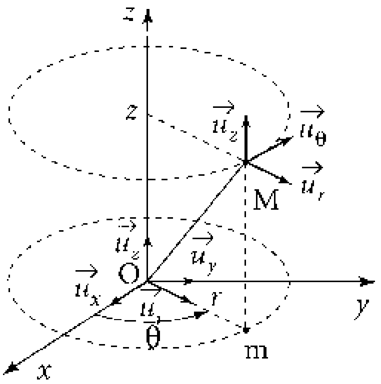
$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$$

Surfaces élémentaires : $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}S = \mathrm{d}y\mathrm{d}z$

Volume élémentaire : $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

- **Base cylindrique.**





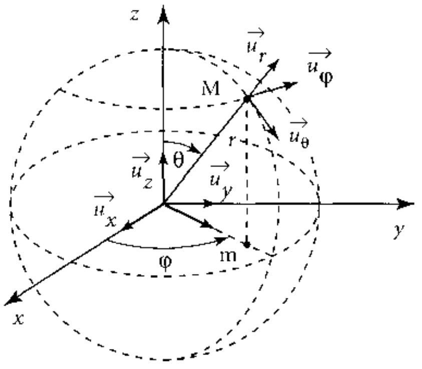
Les coordonnées de *M* sont r, θ, z dans la base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ .Cette base est associé au point *M*, elle est donc en mouvement dans le référentiel d'étude $\Re$. Le vecteur position s'écrit : $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$

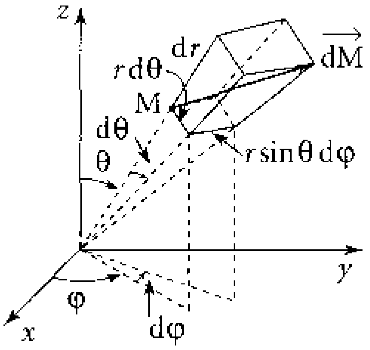
Un déplacement élémentaire du point *M* s'écrit $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\vec{u}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta + \mathrm{d}z\vec{u}_z$

Surfaces élémentaires : $\mathrm{d}S = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$, $\mathrm{d}S = r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}S = \mathrm{d}r\mathrm{d}z$

Volume élémentaire : $d\tau = rdrd\theta dz$

- **Base sphérique.**





Les coordonnées de *M* sont r, θ, φ dans la base cylindrique $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\right)$.
Cette base est associée au point *M*, elle est donc en mouvement dans le référentiel d'étude $\Re$ .Le vecteur position s'écrit : $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$
Un déplacement élémentaire du point *M* s'écrit :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\vec{u}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\vec{u}_\varphi$$

Surfaces élémentaires : $\mathrm{d}S = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$, $\mathrm{d}S = r\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}S = r\mathrm{d}r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi$

Volume élémentaire : $\mathrm{d}\tau = r^2\mathrm{d}r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

2° Trigonométrie circulaire.

- **Relations fondamentales et Formules de duplication.**

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

$$1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} \qquad 1 + \cot^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - \sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a$$

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$$

$$\cos 3a = -3\cos a + 4\cos^3 a$$

$$\tan 3a = \frac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a}$$

- **Formules d'addition.**

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \qquad \cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b \qquad \sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b} \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}$$

Formules de linéarisation.

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} \qquad \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2} \qquad \sin a\cos a = \frac{\sin 2a}{2}$$

- **Expressions en fonction de $\frac{a}{2}$.**

$$1+\cos a = 2\cos^2\frac{a}{2} \qquad 1-\cos a = 2\sin^2\frac{a}{2} \qquad \sin a = 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}$$

En posant $t=\tan\frac{a}{2}$ pour $a\neq \pi+2k\pi$:

$$\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin a = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan a = \frac{2t}{1-t^2}$$

- **Formules de transformation de produit en somme et Fonctions circulaires associées.**

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$$

$$\sin a\sin b = -\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)-\cos(a-b)\right]$$

$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$$

$$\sin(-a) = -\sin a \qquad \cos(-a) = \cos a$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = \cos a \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = \sin a$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+a\right) = \cos a \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right) = -\sin a$$

$$\sin(\pi-a) = \sin a \qquad \cos(\pi-a) = -\cos a$$

- **Formules de transformation de somme en produit.**

$$\begin{cases} a+b=p \\ a-b=q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{p+q}{2} \\ b=\dfrac{p-q}{2} \end{cases}$$

$$\cos p+\cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \qquad \cos p-\cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p+\sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \qquad \sin p-\sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

I : Équation linéaire du 1er ordre à coefficients constants.

1°) Le cadre : méthodes générales.

Forme canonique :	$\boxed{\tau\frac{ds}{dt}+s=e(t)}$, avec τ constante réelle.
Solution :	$\boxed{s(t)=s_{gén}(t)+s_{part}(t)}$, où

$s_{gén}(t)$ est la solution de l'équation homogène sans second membre (***régime libre***) et $s_{part}(t)$ une solution particulière de l'équation complète avec second membre (***régime forcé***).

Solution générale du régime transitoire :	$\boxed{s_{gén}(t)=C\exp\left[-\frac{t}{\tau}\right]}$
Solution particulière du régime forcé :	s_{part} dépend de la forme de $e(t)$: - pour $e(t) = e_0$ constant : $\boxed{s_{part}(t)=e_0}$ - pour $e(t) = e_0\cos(\Omega t)$ (ou $e_0\sin(\Omega t)$), on cherche s_{part} sous la forme : $\boxed{s_{part}(t)=s_0\cos(\Omega t+\varphi)}$.

Pour déterminer s_0 et φ, on passe en complexes en posant: $\underline{s}_{part}=\underline{s}_0\exp(j\Omega t)$ et $\underline{e}(t)=\underline{e}_0\exp(j\Omega t)$ et on résout l'équation algébrique : $[1+j\Omega\tau]\underline{s}_0=\underline{e}_0$. On en tire :

$$\boxed{s_0=|\underline{s}_0|=\frac{|\underline{e}_0|}{\sqrt{1+(\Omega\tau)^2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi=\arg(\underline{s}_0)=\arg(\underline{e}_0)-\arctan(\Omega\tau)}.$$

La constante C qui apparaît dans $s_{gén}$ est déterminée grâce à la condition initiale (en raisonnant sur s_{tot}) : $\boxed{s(t=t_0^+)=C+s_{part}(t=t_0^+)}$.

2°) Le cas d'un système amorti.

Le système régi par l'EDO précédente sera dit ***amorti*** si $\boxed{\tau>0}$.

Pour un tel système la solution générale (décrivant le *régime transitoire*) tend vers 0 au bout d'un temps plus ou moins long : le comportement du système est alors entièrement régi par sa solution particulière.

τ, homogène à un temps, est appelé la constante de temps du système, ou temps de relaxation.

- **Réponse indicielle** : on appelle réponse indicielle d'un système, la réponse s(t) à un ***échelon unité***, c'est-à-dire (après un choix convenable d'origine des temps) : $\boxed{\begin{cases}\forall t<0, e(t)=0\\ \forall t\geq 0, e(t)=1\end{cases}}$.

  En supposant le système initialement au repos (∀ t < 0, s(t) = 0), on obtient, pour t ≥ 0 : $\boxed{s(t)=1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$.

La constante de temps τ du système trouve alors une interprétation géométrique simple :

La tangente à l'origine $\left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=0}$ coupe l'asymptote en régime permanent ($\lim_{t\to+\infty} s(t)$) pour l'instant $\boxed{t=\tau}$.