

SYNTHESE DES FONCTIONS DIFFERENTIELLES OU DERIVEES (Niveau IV+;III)

A notre époque, on présente trop souvent en mathématique la synthèse de notre travail au début du livre ou du chapitre. Afin de ne pas couper court aux habitudes et de ne pas vous rebuter immédiatement sur les démonstrations historiques, j'en ferais de même. Ceci dit, pour ceux qui ne comprennent rien à la synthèse, je vous invite vivement à lire les démonstrations soit classique, soit moderne (avec le symbole de la sommation pratique pour résumer), soit les deux.

✿ Définition littéraire : le terme synthèse (du latin synthesis, du grec sunthesis) signifie : opération intellectuelle (exemple : exposé oral ou écrit) structuré et homogène réunissant divers éléments de connaissances dans un domaine particulier.

✿ Définition philosophique : démontre le contenu des conclusions après l'étude des effets et des causes.

RAPPELS : $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots\times 3.2.1}{[(n-k)(n-k-1)\dots\times 3.2.1][(k)(k-1)\dots 3.2.1]}$

Exemption : Différentielle des fonctions constantes

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{a(x+\Delta x)^0 - a(x)^0}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x^0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x^0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 0$$

Remarque : Relation strictement non officiel et strictement personnel :

$$a(x+\Delta x)^0 = a C_0^0 x^0 (\Delta x)^0 = a \times 1 \times x^0 (1) = a$$

Différentielles des fonction monomiales n^{ième} :

$$(x+h)^n = \sum_{i=0}^{i=n} C_n^i x^{n-i} h^i$$

$$\Leftrightarrow (x+h)^n = \left(C_n^0 x^{n-0} h^0 \right) + \left(C_n^1 x^{n-1} \right) h + \left(\sum_{i=2}^{i=n} C_n^i x^{n-i} h^i \right)$$

$$\Leftrightarrow f(x+h) - f(x) = h \left(C_n^1 x^{n-1} + \left(\sum_{i=2}^{i=n} C_n^i x^{n-i} h^{i-1} \right) \right)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{n!}{(n-1)!!} x^{n-1} \right) + \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = n x^{n-1}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = n x^{n-1}$$

Différentielles des fonctions monomiales scalaire n^{ième} :

	$f(x + \Delta x) = k(x + \Delta x)^n$
\Leftrightarrow	$f(x + \Delta x) = k \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k x^{n-k} \Delta^k x$
\Leftrightarrow	$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x [k n x^{n-1} + (\sum_{k=1}^{n-1} k C_n^k x^{n-k} (\Delta x)^{k-1})]$
\Leftrightarrow	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = k(n x^{n-1}) + \varepsilon_k [\Delta_{k-1}(x)]$
\Leftrightarrow	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k(n x^{n-1} + \varepsilon_k [\Delta_{k-1}(x)])$
\Leftrightarrow	$f'(x) = k n x^{n-1}$
\Leftrightarrow	$\frac{dy}{dx} = k n x^{n-1}$

Différentielle des fonctions rationnelle monomiales n^{ième} :

	$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{(x+h)^n} - \frac{1}{x^n}$
\Leftrightarrow	$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{\sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} (h)^k} - \frac{1}{(x)^n}$
\Leftrightarrow	$f(x+h) - f(x) = \frac{x^n - \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} (h)^k}{\left(\sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} (h)^k\right) (x)^n}$
\Leftrightarrow	$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h \left[-n x^{n-1} - \left(\sum_{k=2}^n C_n^k x^{n-k} (h)^{k-1} \right) \right]}{h \left[x^{2n} + \left(\sum_{k=1}^n C_n^k x^{2n-k} (h)^k \right) \right]}$
\Leftrightarrow	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-n x^{n-1} - \varepsilon_1(\Delta x)}{x^{2n} + \varepsilon_2(\Delta x)}$
\Leftrightarrow	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\frac{n}{x^{n+1}}$
\Leftrightarrow	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$

Différentielles des fonctions Identités Remarquables

Différentielles des identités remarquables polynomiales

$$f(x+h) = (a(x+h)+b)^n$$

$$\Leftrightarrow (x+\Delta x) = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k (a(x+h))^{n-k} b^k \quad \Delta x = h$$

$$\Leftrightarrow f(x+h) = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k (a)^{n-k} \left(\sum_{j=0}^{j_1=k} C_{n-j_1}^k (x)^{n-j} (h)^j \right) \times b^k$$

$$\Rightarrow f(x+\Delta U) = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k a^k \left(\sum_{j=0}^{j_1=k} C_{n-j_1}^k (ax)^{n-j} b^j \right) \times h^k$$

$$\Leftrightarrow f(x+\Delta U) = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k a^k (ax+b)^{n-k} \Delta x^k$$

$$\Leftrightarrow f(x+h) = (ax+b)^n + [na(ax+b)^{n-1}(\Delta x) + \sum_{k=2}^{k=3} C_n^k a^k (ax+b)^{n-k} \Delta x^k] \quad (\text{Rq : } h = \Delta x = \Delta U, \text{ quand } \Delta x \rightarrow 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = na(ax+b)^{n-1} + [\varepsilon(\Delta x)] \quad \Delta x = \Delta U ; U=(ax+b)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta U \rightarrow 0} \frac{f(U+\Delta U) - f(U)}{\Delta U} = \lim_{\Delta U \rightarrow 0} [na(U)^{n-1} + [\varepsilon(\Delta U)]]$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = n U^{n-1} \times U'(x)$$

Différentielles des identités remarquables rationnelles

$$\begin{aligned}
 & f(x+h) = \frac{1}{(a(x+h)+b)^n} \\
 \Rightarrow & f(x+h) - f(x) = \frac{1}{(ax+ah+b)^n} - \frac{1}{(ax+b)^n} \\
 \Leftrightarrow & f(x+h) - f(x) = \frac{(ax+b)^n(ax+b)+ah)^n}{(ax+b+ah)^n(ax+b)^n} \\
 \Leftrightarrow & f(U+h) - f(U) = \frac{(U)^n - (U+ah)^n}{(U+ah)^n(U)^n} \\
 \Leftrightarrow & f(U+h) - f(U) = \frac{U^n - \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k(U)^{n-k}(ah)^k}{\left(\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k(U)^{n-k}(ah)^k\right)(U)^n} \\
 \Leftrightarrow & \frac{f(U+h) - f(U)}{h} = \frac{\cancel{1} \left(-nU^{n-1}(a) - \sum_{k=2}^{k=n} C_n^k(U)^{n-k} a^k h^{k-1} \right)}{\cancel{1} \left(U^{2n} + \sum_{k=1}^{k=n} C_n^k(U)^{2n-k} (ah)^k \right)} \\
 \Leftrightarrow & \lim_{\Delta U \rightarrow 0} \frac{f(U+\Delta U) - f(U)}{\Delta U} = \frac{-nU^{n-1}(a)}{U^{2n}} \\
 \Leftrightarrow & \mathbf{f}'(\mathbf{U}) = \frac{dy}{dU} = \frac{-n(U)'}{U^{n+1}} \quad \left(= -\frac{n(U'(x))}{U^{n+1}} \right) \\
 \Leftrightarrow & \mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \frac{dy}{dx} = \frac{-n(a)}{(ax+b)^{n+1}}
 \end{aligned}$$

Addition de fonction

a) **différentielle de Newton** : Somme de fonction du premier degré:

$$\begin{aligned} De: \begin{cases} f(x) = (ax+b) = U = f(U) \\ g(x) = (cx+d) = V = f(V) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} f(x+\Delta x) = (a(x+\Delta x)+b) = ((ax+b)+a\Delta x) = (U+\Delta U) \\ g(x+\Delta x) = (c(x+\Delta x)+d) = ((cx+d)+c\Delta x) = (V+\Delta V) \end{cases} \\ \\ \Leftrightarrow f(U+h) + f(V+h) &= ((ax+b)+ah) + ((cx+d)+ch) \\ \Leftrightarrow f(U+V+h) &= ((ax+b)+(cx+d)) + (ah+ch) \\ \Leftrightarrow f(U+h) + f(V+h) &= (U+V) + (a+c)h \\ \Leftrightarrow f(U+h) + f(V+h) &= (f(U+V) + (a+c)h) \\ \Leftrightarrow [f(U+h) + f(V+h)] - f(U+V) &= (a+c)h \\ \Leftrightarrow \frac{f(U+V+h) - f(U+V)}{h} &= a+c \\ \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f((U+V)+\Delta x) - f(U+V)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a+c \\ \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(U+\Delta U) + (V+\Delta V)] - UV}{\Delta x} &= U' + V' \\ \Leftrightarrow f'(U+V) &= f'(U) + f'(V) \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = U' + V' &\Leftrightarrow dy = U' dx + V' dx = dU + dV \end{aligned}$$

b) **Différentielle de Newton** : Somme de fonction de nième degré

Produit des différentielles à la puissance n :

$$\left(\sum_{i=n}^{i=0} a_i \circ (x+h)^i \right) \left(\sum_{i=n}^{i=0} b_i \circ (x+h)^i \right) = \sum_{k=0}^{k=i} C_i^k a_k(x)^{i-k} h^i \times \sum_{k=0}^{k=i} C_i^k b_k(x)^{i-k} h^i$$

Posons $U_i = \sum_{k=0}^{k=i} C_i^k a_k(x)^{i-k}$; $V_i = \sum_{k=0}^{k=i} C_i^k b_k(x)^{i-k}$ d'où

$$f(U.V) = \left(\sum_{i=n}^{i=0} a_i \circ (x+h)^i \right) \left(\sum_{i=n}^{i=0} b_i \circ (x+h)^i \right) = \left(\sum_{i=0}^{i=n} U_i h^i \right) \left(\sum_{i=0}^{i=n} V_i h^i \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=0}^{i=n} U_i h^i \right) \left(\sum_{i=0}^{i=n} V_i h^i \right) = \begin{pmatrix} U_0 & V_0 \\ U_1 h & V_1 h \\ U_2 h^2 & V_2 h^2 \\ \vdots & \vdots \\ U_{n-2} h^{n-2} & V_{n-2} h^{n-2} \\ U_{n-1} h^{n-1} & V_{n-1} h^{n-1} \\ U_n h^n & V_n h^n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=3}^{i=0} U_i h^i \right) \left(\sum_{i=3}^{i=0} V_i h^i \right) = U_0 V_0 + (U_1 V_0 + U_0 V_1) h + \Sigma(U_\alpha V_\beta) h^i$$

$\Sigma(U_\alpha V_\beta) h^i$ représente le reste de la fonction, j'ai utiliser le symbole Σ , lu sigma dans ce cas, comme symbole général afin de faire le lien avec le symbole \mathcal{E} lorsqu'on effectuera le passage à la limite

Ors

$$U_0 = \sum_{i=0}^{i=n} C_n^k a_k x^{n-k} = U ; V_0 = \sum_{i=0}^{i=n} C_n^k b_k x^{n-k} ; U_1 = \left(\sum_{i=1}^{i=n} C_n^1 a_k x^{n-k} \right) = U' ; V_1 = \left(\sum_{i=1}^{i=n} C_n^1 b_k x^{n-k} \right) = V'$$

Mais Comme on l'a constaté dans les puissance 2 et 3, $U_2 \# U''$ (dérivé seconde) à un multiple K près, et $V_2 \# V''$ à un multiple K près, et ainsi de suite. d'où :

$$\left(\sum_{i=3}^{i=0} a_i \circ (x+h)^i \right) \left(\sum_{i=3}^{i=0} b_i \circ (x+h)^i \right) = f(U+h) \times f(V+h) \text{ et } UV = f(UV)$$

Soit :

$$f(U+h) \times f(V+h) = f(UV) - (U'V + UV') + \Sigma(U_\alpha V_\beta h^i)$$

$$\Leftrightarrow [f(U+h) \times f(V+h)] - f(UV) = (U'V + UV') h + \Sigma(U_\alpha V_\beta h^i)$$

$$\Leftrightarrow \frac{[f(U+h) \times f(V+h)] - f(UV)}{h} = (U'V + UV') + \Sigma(U_\alpha V_\beta h^{i-1})$$

$$\Leftrightarrow \frac{[f(U+h) \times f(V+h)] - f(UV)}{h} = (U'V + UV') + \mathcal{E}(h)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(U+\Delta x) \times f(V+\Delta x)] - f(UV)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (U'V + UV') + \mathcal{E}(\Delta x)$$

$$\Leftrightarrow f'(U.V) = U'V + UV'$$

Chemin d'accès pas tout à fait au point.

Fonction rationnelle polynomiales de type U/V

Fonction rationnelle homographique du second degré (fonction hyperbolique):

$$\text{Soit } f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{(a_2x^2 + a_1x + a_0)}{(b_2x^2 + b_1x + b_0)} = \frac{\sum_{j=0}^{i=2} a_j x^j}{\sum_{j=2} b_j x^{i-1}} = \frac{U}{V} \text{ avec } j \leq i$$

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{(a_2x^2 + a_1x + a_0)}{(b_2x^2 + b_1x + b_0)} = \frac{U}{V}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f_1(x+h)}{f_2(x+h)} = \frac{(a_2(x+h)^2 + a_1(x+h) + a_0)}{(b_2(x+h)^2 + b_1(x+h) + b_0)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{f_2(x+h) - f_2(x)} = \frac{(a_2x^2 + a_1x + a_0) + h(2a_1x + a_1) + a_2h}{(b_2x^2 + b_1x + b_0) + h(2b_1x + b_1) + b_2h} - \frac{(a_2x^2 + a_1x + a_0)}{(b_2x^2 + b_1x + b_0)}$$

Ors par définition de la différentielle première de la fonction monomiales du nième degré :

$$f(x) = x^n; f'(x) = nx^{n-1}$$

et par définitions des dérivation successives d'une somme monomiales

$$f(x) = \sum_1^n f_i(x) \Rightarrow f'(x) = \sum_1^n f_i'(x)$$

Il vient que $\begin{cases} U = a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ V = b_2x^2 + b_1x + b_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U' = 2a_2x + a_1 \\ V' = 2b_2x + b_1 \end{cases}$; Soit on peut écrire :

$$\Leftrightarrow \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{f_2(x+h) - f_2(x)} = \frac{(U) + h(U') + a_2h^2}{(V) + h(V') + b_2h^2} - \frac{(U)}{(V)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{f_2(x+h) - f_2(x)} = \frac{[(U) + h(U') + a_2h^2](V) - (U)[(V) + h(V') + b_2h^2]}{(V) + h(V') + b_2h^2)(V) - (V)(V) + h(V')(V) + b_2h^2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{f_2(x+h) - f_2(x)} = \frac{UV - UV + h[(U')(V) + (V)a_2h] + (V')(U) + (U)b_2h}{(V)^2 + h(V')(V) + b_2h(V)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{f_2(x+h) - f_2(x)} = \frac{[(U')(V) + (V')(U) + [(V)a_2 + (U)b_2]h}{(V)^2 + h(V')(V) + (V)b_2h}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(U')(V) + (V')(U) + [(V)a_2 + (U)b_2]h}{(V)^2 + h(V')(V) + (V)b_2h}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{h} = \frac{(U')(V) + (V')(U)}{(V)^2} + \varepsilon(h) \text{ où } \varepsilon(h) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(V)a_2 + (U)b_2]h}{(V)^2 + h(V')(V) + (V)b_2h} = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{VU' + UV'}{V^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{VU' + UV'}{V^2}$$

$$\Leftrightarrow dy = \frac{VU' dx + UV' dx}{V^2} = \frac{VdU + UdV}{V^2}$$

Différentielle de fonction rationnelles polynomiales

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\sum_{i=n}^{i=0} a_i x^i}{\sum_{j=n}^{j=0} b_j x^{j-1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f_1(x+h)}{f_2(x+h)} = \frac{\sum_{i=n}^{i=0} a_i (x+h)^i}{\sum_{j=n}^{j=0} b_j (x+h)^j} - \frac{\sum_{i=n}^{i=0} a_i x^i}{\sum_{j=n}^{j=0} b_j x^j}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f_1(x+h)}{f_2(x+h)} - \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\sum_{i=n}^{i=0} a_i x^i + \sum_{i=n}^{i=1} a_i x^{i-1} h + \sum_{i=n}^{i=2} a_i x^{i-2} h^2 + \dots + \sum_{i=n}^{i=n-2} a_i x^2 h^{n-i} + \sum_{i=n}^{i=n-1} a_i x^1 h^{n-i} + \sum_{i=n}^{i=n} a_i x^0 h^{n-i}}{\sum_{i=n}^{i=0} b_j x^j + \sum_{i=n}^{i=1} b_j x^{j-1} h + \sum_{i=n}^{i=2} b_j x^{j-2} h^2 + \dots + \sum_{j=n}^{j=n-2} b_j x^2 h^{n-j} + \sum_{j=n}^{j=n-1} b_j x^1 h^{n-j} + \sum_{j=n}^{j=n} b_j x^0 h^{n-j}} - \frac{\sum_{i=n}^{i=0} a_i x^i}{\sum_{j=n}^{j=0} b_j x^j}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f_1(x+h)}{f_2(x+h)} - \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\left(\sum_{i=n}^{i=0} a_i x^i + \sum_{i=n}^{i=1} a_i x^{i-1} h + \sum_{j=2}^{j=n} \left(\sum_{i=n}^{i=j} a_i x^i h^{n-i} \right) \right)}{\left(\sum_{i=n}^{i=0} b_j x^j + \sum_{i=n}^{i=1} b_j x^{j-1} h + \sum_{j=2}^{j=n} \left(\sum_{i=n}^{i=j} b_j x^i h^{n-i} \right) \right)} - \frac{\sum_{i=n}^{i=0} a_i x^i}{\sum_{j=n}^{j=0} b_j x^j}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f_1(x+h)}{f_2(x+h)} - \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{(U) + h(U') + h(\Sigma_a(h))}{(V) + h(V') + h(\Sigma_b(h))} - \frac{(U)}{(V)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f_1(x+h)}{f_2(x+h)} - \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{[(U)(V) + h(U')(V) + h(\Sigma_a(h)(V))] - [(U)(V) + h(U)(V') + h(U)(\Sigma_b(h))]}{(V) + h(V') + h(\Sigma_b(h)(V))}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f_1(x+h)}{f_2(x+h)} - \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{UV - UV + h[(U')(V) - (U)(V') + ((\Sigma_a(h)V - (\Sigma_b(h)U))]}{(V)^2 + h(V')(V) + h(\Sigma_b(h)(V))}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f_1(x+h)}{f_2(x+h)} - \frac{f_1(x)}{f_2(x)}}{h} = \frac{[(U')(V) - (U)(V') + ((\pm \Sigma(h))]}{(V)^2 + h(V')(V) + h(\Sigma_b(h)(V))} \quad \text{posons } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = h, \text{ alors :}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(U')(V) + (V')(U)}{(V)^2} + \varepsilon(\Delta x) \quad \text{où } \varepsilon(\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\pm \Sigma(\Delta x))}{(V)^2 + \Delta x(V')(V) + h(\Sigma_b(\Delta x)(V))} = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{VU' + UV'}{V^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{VU' + UV'}{V^2}$$

$$dy = \frac{VU'dx + UV'dx}{V^2} = \frac{VdU + UdV}{V^2}$$

Fonction irrationnelle carré monomiale du premier degré (fonction racine carré)

$$\text{Soit : } f(x) = \sqrt{x+h} = (1+h)^{1/2}$$

Des id monomiales du $n^{\text{ième}}$ degré :

$$f(x) = (x+h)^n =$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k x^{n-k} h^k$$

$$\Leftrightarrow (x+h)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} h^1 + \sum_{i=2}^{i=n} C_n^k x^{n-k} h^k$$

$$\Leftrightarrow (x+h)^n = x^n + \frac{n!}{(n-1)!1!} x^{n-1} h^1 + \sum_{i=2}^{i=n} C_n^k x^{n-k} h^k$$

$$\Leftrightarrow (x+h)^n = x^n + n x^{n-1} h^1 + \sum_{i=2}^{i=n} \frac{n!}{(n-k)!k!} x^{n-k} h^k$$

En posant $n = \frac{1}{2}$ On peut écrire :

$$f(x+h) = x^{1/2} + \frac{1}{2} x^{1/2-1} h^1 + \sum_{i=2}^{i=n} C_n^k x^{n-k} h^k$$

$$f(x+h) = f(x) + \frac{1}{2} x^{1/2-1} h^1 + \sum_{i=2}^{i=n} C_n^k x^{n-k} h^k$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{2} x^{-1/2} + \sum_{i=2}^{i=n} \frac{(n)!}{(n-k)!k!} x^{n-k} h^{k-1}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{2(x^{1/2})} + \varepsilon(\Delta x)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Fonction irrationnelle n^{ième} monomiale du m^{ième} degré (fonction racine m/n)

De :

$$f(x) = \sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$$

$$\Rightarrow f(x+h) = \sqrt[n]{(x+h)^m}$$

$$\Leftrightarrow f(x+h) = (x+h)^{m/n}$$

$$\Leftrightarrow f(x+h) = \left[x^{m/n} + \sum_{k=1}^{k=n} C_{n/3}^k x^{(m-nk)/n} h^{k-1} \right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+h)}{h} = \frac{f(x) + h \left(\frac{m}{n} x^{(m-n)/n} + \left[\sum_{k=2}^{k=n} C_{n/3}^k x^{(m-nk)/n} h^{k-1} \right] \right)}{h}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{m}{n} x^{(m-n)/n} + \varepsilon(h)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{m}{n} x^{(m-n)/n} + \varepsilon(\Delta x) \quad \text{avec } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = \varepsilon(h)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{m}{n} \sqrt[n]{x^{(m-n)}} & \text{Si } m > n \\ \text{ou} \\ f'(x) = \frac{dy}{dx} = x & \text{Si } m = n \\ \text{ou} \\ f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{m}{n \sqrt[n]{x^{(m-n)}}} & \text{Si } m < n \end{cases}$$

Remarque :

$$C_{m/n}^k = \frac{\frac{m}{n} \times \left(\frac{m}{n}-1\right) \times \left(\frac{m}{n}-2\right) \times \left(\frac{m}{n}-3\right) \times \dots \times \left(\frac{m}{n}-k+1\right) \times \left(\frac{m}{n}-k\right) \times \left(\frac{m}{n}-k+1\right) \times \left(\frac{3}{2}\right) \times \left(\frac{2}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\left(\frac{m}{n}-k\right)\left(\frac{m}{n}-k+1\right) \times \dots \times \left(\frac{3}{2}\right) \times \left(\frac{2}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)\right) ((k)(k-1)(k-2)(k-3) \dots (3)(2)(1))}$$

$$C_{m/n}^k = \frac{\prod_{i=m}^{i=1} \frac{i}{n}}{\left(\prod_{i=m}^{i=1} \left(\frac{i}{n}-k\right)\right) \left(\prod_{i=k}^{i=1} k\right)} = \frac{\prod_{i=m}^{i=1} \frac{i}{n}}{\left(\prod_{i=m}^{i=1} \left(\frac{i-kn}{n}\right)\right) \left(\prod_{i=k}^{i=1} k\right)}$$

Soit:

$$C_{m/n}^1 = \frac{\frac{m}{n} \times \left[\left(\frac{m}{n}-1\right) \times \left(\frac{m}{n}-2\right) \times \left(\frac{m}{n}-3\right) \times \dots \times \left(\frac{m}{n}-k+1\right) \times \left(\frac{m}{n}-k\right) \times \left(\frac{m}{n}-k+1\right) \times \left(\frac{3}{2}\right) \times \left(\frac{2}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)\right]}{\left[\left(\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-1+1\right) \times \dots \times \left(\frac{3}{2}\right) \times \left(\frac{2}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)\right)\right] 1!}$$

$$\Leftrightarrow C_{n/m}^1 = \frac{\frac{m}{n}}{1} = \frac{m}{n}$$