$\boxed{1^{ère} partie : \acute{E}tude\ de\ l'application\ f_m}$

1. degré de R $\leq n$, admettant "n + 1ol>deg(R)" racines distintes, donc R $\equiv 0$.

2. Soient (P ;Q) $\in P_m^2$ et $\alpha \in R$, on a :

$$\begin{aligned} f_m(P+\alpha Q) &= ((P+\alpha Q)(x_0);...;(P+\alpha Q)(x_n)) \\ &= (P(x_0);...;P(x_n)) + \alpha(Q(x_0);...;Q(x_n)) \\ &= f_m(P) + \alpha f_m(Q) \qquad \boxed{cqfd} \end{aligned}$$

3. a. ♣ Soit P$\in$ker f_m, alors ;$\forall 0 \leq i \leq n$: P(x_i) $= 0 \Leftrightarrow \forall 0 \leq i \leq n$: S_i =X-x_i $|_P$ donc π $|_P$ (en effet $S_0 \wedge ... \wedge S_n = 1$)

♣ inverssement pour tout πQ/ Q$\in P_{m-n-1}$ on a clairement πQ $\in$ker f_m.

b. Soit P$\in P_m$, alors (division euclidienne) :

$$\exists!(Q;R) \in R[X]^2 \text{ tel que } P = Q\pi + R, \text{ avec } 0 \leq degR \leq (\deg \pi\ - 1 = n),$$

Or $Q\pi$ $\in$ker f_m et R $\in P_m$, alors P_m = ker $f_m \oplus P_n$

(remarquer que la décomposition P = $Q\pi$ + R est unique : R est un corps)

c. ♣P_m = ker $f_m \oplus P_n \Rightarrow$ dimker f_m=$\dim P_m$ -dimP_n = m-n.

♣ pour une base il suffit de prendre la famille (π ; $X\pi; ...; X^{m-n-1}\pi$) (échelonné en nb de m-n).

d. Théorème du rang (ou noyau) $\Rightarrow$

$$rg\, f_m = dimP_m - dimker\, f_m = m + 1 - m + n = n + 1, \quad \boxed{\underset{\rightarrow}{ie}\ \ rg\, f_m = \dim R^{n+1}}$$

donc f_m est surjective .

4.a. Soit P $\in$ Pm tel que f_m(P) = 0, alors P aura "n+1 >deg(p)" racines distinctes (m$\leq$n) Donc P $\equiv$ 0 .

b. rg f_m = dimP_m = m + 1.(TH du rang)

c. f_m est surjective $\Leftrightarrow$ dimP_m = dimR^{n+1},$\boxed{\underset{\rightarrow}{ie}\ m = n.}$

5.a. L'application : $f_m : P_n \rightarrow R^{n+1}$

$$P \mapsto (P(x_0);...;P(x_n)) \quad \text{est bijective (via c.)}$$

Donc ($\forall$ y = (y_0 ; y_1 ;... ; y_n)$\in R^{n+1}$); ($\exists! P_y \in P_n$) tel que $f_n(P_y)$ = y.

b. i. Par définition des L_i, on a ($L_i(x_0)$; ...; $\underset{i^{ime} place}{L_i(x_i)}$; ...,$L_i(x_n)$) = ε_i =(0 ;... ;0 ; $\underset{i^{ime} place}{1}$;0 ;... ;0) donc $L_i(x_j)$ = 0 si j $\neq$ i et $L_i(x_i)$ = 1

$$\boxed{\underset{\rightarrow}{ie} \qquad L_i(x_j) = \delta_{i,j}}$$

ii. f_n est un isomorphisme de P_n sur R^{n+1} donc de même pour f_n^{-1} (application réciproque).

$$\boxed{\text{OR } (L_1 ; L_2 ; .... ; L_n) = f_n^{-1}(\varepsilon_0 ; \varepsilon_1 ; .... ; \varepsilon_n)}$$

(ε_0 ;ε_1 ; .... ; ε_n) etant une base de R^{n+1} donc (L_1 ;L_2 ; .... ; L_n) est une base de P_n,

c. ♣On a : y= (y_0 ; y_1 ; ... ; y_n) = $\sum\limits_{i=0}^{i=n} y_i\varepsilon_i$, alors $f_n(P_y) = \sum\limits_{i=0}^{i=n} y_i f_n(L_i) = f_n\left(\sum\limits_{i=0}^{i=n} y_i L_i\right)$ mais f_n est bijective *donc* $P_y = \sum_{i=0}^{i=n} y_i L_i$

♣ $\sum_{i=0}^{i=n} L_i$ =1 *car* $\left(\sum_{i=0}^{i=n} L_i\right)(x_i) = 1$ *pour tout i=0,...,n. et* $\left(\sum_{i=0}^{i=n} L_i\right) - 1 \in P_n$ *admettant n+1 racines.*

$2^{ème}$ partie : Problème aux moindres carrées

1.a. Soit Ax∈ ImA (x∈$M_{q;1}$*). Alors* $< b - Au\,;\, Ax >_p = {}^t x\, {}^tA(b-Au) = 0$;

d'autre part : $M_{p;1}(R) = ImA \oplus (ImA)^{\perp}$ *et* $\underset{\in M_{p;1}(R)}{b} = \underset{\in ImA}{Au} + \underset{\in (ImA)^{\perp}}{b - Au}$ *(unicité de la décomposition)*

$$\boxed{\underrightarrow{ie}\quad Au = P_{ImA}(b)}$$

b. Il suffit de voir que : $\|b - Au\|_p \le \|b - Ax\|_p$ *pour tout* $x \in M_{q;1}(R)$ *puisque* Au *est de la forme* Ax *avec u∈* $M_{q;1}(R)$.

Soit x∈ $M_{q;1}(R)$,

$$\|b - Ax\|_p^2 = \|b - Au\|_p^2 + \|Au - Ax\|_p^2 = \|b - Au\|_p^2 + \|A(u - x)\|_p^2 \ge \|b - Au\|_p^2 . \text{ (Pytagore)}$$

les vecteurs v∈ $M_{q;1}(R)$ *vérifiant Av = Au caractérise les points où le minimum est atteint .*

2. Soit x∈ $M_{q;1}(R)$,

$< x\,;\, {}^t Ab - {}^t AAu > = {}^t x\, {}^t Ab - {}^t AAu = {}^t(Ax)\,(b-Au) = < Ax\,; b-Au > = 0$ $\left(puisque\ \|b - Au\|_p^2 = \min_{x \in M_{q;1}(R)} \|b - Ax\|_p^2\right)$

OR ${}^t Ab - {}^t AAu \in M_{q;1}(R)$ *donc* $\left\|{}^t Ab - {}^t AAu\right\|_q = 0$; $\boxed{\underrightarrow{ie}\quad {}^t Ab = {}^t AAu}$

3.a. Soit x∈ker${}^t AA$*, alors* ${}^tAAx = 0$ *par suite* $< Ax; Ax >_p = {}^t x\, {}^t AAx = 0$.

b. ♣ *(3.a.* $\Rightarrow \|Ax\|_p = 0 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x \in \ker A$*). donc ker*${}^t AA \subset \ker A$.

♣ *ker*${}^t AA \supset \ker A$ *(clair).*

c. On a : $rg({}^tA) = rg(A) = \dim M_{p;1}(R) - \dim\ker(A) = p - \dim\ker({}^tAA) = rg({}^tAA)$.

d. Soit x∈ $M_{q;1}(R)$ *tel que* ${}^tAAx \in Im\,{}^tAA$*, donc* ${}^tAAx = {}^t Ay \in Im\,{}^t A$.

$\underrightarrow{Déduction}$: $\begin{cases} rg({}^tA) = rg(A) \\ Im\,{}^tAA \subset Im\,{}^tA \end{cases} \Rightarrow Im\,{}^tAA = Im\,{}^tA$ *(puisque* $Im\,{}^tAA$ *et* $Im\,{}^tA$ *sont des sev de* $M_{p;1}(R)$*).*

4.a. (1. et 2 $\Rightarrow$ *[le problème aux moindres carrés admet une solution* $\Leftrightarrow \exists u \in M_{q;1}(R)$ *tel que* ${}^tAAu = {}^t Ab$*]),*

(3.d $\Rightarrow$ *que les solutions du système* ${}^tAAu = {}^t Ab$ *existent tjs).*

b. Soient u_1, u_2 *deux solutions de* ${}^tAAu = {}^t Ab$ *. Alors :*

$$\begin{cases} {}^tAAu_1 = {}^t Ab \\ {}^tAAu_2 = {}^t Ab \end{cases} \Rightarrow {}^t AA\,(u_1 - u_2) = 0 \Rightarrow u_1 - u_2 \in \ker{}^t AA = \ker A \text{ (via 3.b.)}$$

OR $\ker A = \{0\}$ *donc* $u_1 = u_2$ $\boxed{\underrightarrow{ie}\quad \exists! u \in M_{q;1}(R) \text{ tel que } {}^tAAu = {}^t Ab \text{ sous condition } \ker A = \{0\}}$.

$3^{ème}$ Partie : Approximation polynômiale au sens des moindres carrées

$\underrightarrow{A.\ Étude\ du\ cas\ m \ge n + 1}$

1. (partie 1, 5.a.) $\Rightarrow \forall\, y = (y_0\,; y_1\,; ...\,; y_n) \in R^{n+1}$); ($\exists! P_y \in P_n$) *tel que* $f_n(P_y) = y$*. Mais puisque* $P_n \subset P_m$ *(clair)* *il suffit de prendre* $Q_0 = P_y$ *(attention on n'a pas necessairement l'unicité de* Q_0*), ensuite via (partie 1, 5.c.)*

$$\boxed{Q_0 == \sum_{i=0}^{i=n} y_i L_i}$$

2. Le polynôme Q_0 *vérifie* $Q_0(x_i) = y_i$ *pour tout* $i = 0, ..., n$ *donc* $\Phi_m(Q_0) = 0$ *puis* $\lambda_m = 0$

d'où le minimum est atteint en Q_0*. Inversement si P est un polynôme tel que* $\Phi_m(P) = 0$ *,alors*

$$\sum_{i=0}^{i=n} (y_i - P(x_i))^2 = 0 \Rightarrow y_i = P(x_i) \underset{via\ \text{A.1.}}{=} Q_0(x_i)$$

$$\Rightarrow (P - Q_0)(x_i) = 0 \ \ pour\ tout\ i = 0, ..., n$$

$$\text{(attention } deg(P - Q_0) \succ n + 1)$$

$\underrightarrow{Conclusion}$ *le minimum est atteint pour les* $P \in P_m$ *tel que* $y_i = P(x_i)$

$\underrightarrow{B.\ \acute{E}tude\ du\ cas\ m \leq\ n}$

1.a. Je note $\left({}^tAA\right)_{i,j}$ *le coefficient dindice (i,j) .*

$A \in M_{n+1,m+1}(R), {}^tA \in M_{m+1,n+1}(R)$ *donc* ${}^tAA \in M_{m+1,m+1}(R)$; $(A)_{i,j} = x_{i-1}^{j-1}$ *,* $({}^tA)_{i,j} = x_{j-1}^{i-1}$

$$\left({}^tAA\right)_{i,j} = \sum_{k=1}^{k=n+1} \left({}^tA\right)_{i,k} (A)_{k,j} = \sum_{k=1}^{k=n+1} x_{k-1}^{i-1} x_{k-1}^{j-1} = \sum_{k=0}^{k=n} x_k^i x_k^j$$

b. la matrice :

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & . & . & x_0^m \\ . & x_1 & . & & & . \\ . & & . & . & & . \\ . & & & . & . & . \\ . & & & & . & x_{m-1}^m \\ 1 & x_m & x_m^2 & & & x_m^m \end{pmatrix}$$

est une "VANDERMONDE" dont le déterminant est donné par : det(A_m*)* $= \prod_{0 \leq i \prec j \leq m}^{k=n+1} (x_j - x_i) \neq 0$ *(à démontrer ! !)*

A_m *est une matrice extraite d'ordre maximal dont le déterminant est non nul,*

donc rg(A)$\geq m + 1$ *mais rg(A)* $\leq \min(n + 1, m + 1) = m + 1$ $\boxed{cqfd}$.

c. via prtie 2 - 3.c. on a rg^t *AA = rgt* ^{A} *= rgA = m + 1,* $\boxed{\underrightarrow{ie}\ {}^tAA \text{ est inversible.}}$.

2. a. la i^{ieme} *coordonné de AV*$_p$ *est donné par* $(AV_p)_i = \sum_{k=1}^{k=n+1} x_{i-1}^{k-1} a_{k-1} = \sum_{k=0}^{k=n} a_k x_i^k = P(x_i)$

b. clair.

3. a. via partie 2, kerA=ker^t*AA={0} car* ^{t}*AA est inversible. Toujours d'après partie 2 - 4.b.*

$\exists! u \in M_{m+1;1}(R)$ *(que je note aussi* V_p*) tel que:* $\|b - \ Au\|_p^2 = \min\{\|b - \ Ax\|_p^2 / x \in M_{m+1;1}(R)\ \}$

OR (2.b : question précidente) $montre$ *que* $\|b - \ Au\|_p^2 = \Phi_m(P)$ *avec P=*$\sum_{k=0}^{k=m} a_k X^k$.

○ ○ ○○ P_0 *=P est unique car u est unique.*

b. Clair il suffit de prendre U = V_{P_0} .

c. $\lambda_m = \Phi_m(P_0)$.

$\underrightarrow{4.Application}$ (**MAPLE**)

a. et b. facile :

$> with(linalg) : A := vandermonde([-1, 0, 1, 2]);$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$> B := evalm(transpose(A)\& * A);$

$$B := {}^tAA = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 8 & 18 \\ 6 & 8 & 18 & 32 \\ 8 & 18 & 32 & 66 \end{pmatrix}$$

$> b := vector([1, 2, 1, 0]);$

$$b := [1, 2, 1, 0]$$

$> b1 :=< 1, 2, 1, 0 >;$

$$b1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$> c := evalm(transpose(A)\& * b);$

$$c := [4, 0, 2, 0]$$

$> evalm(transpose(A)\& * b1);(ecriture\ incorrecte)$

$$ERROR!!$$

c. Le syslème devient :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 8 & 18 \\ 6 & 8 & 18 & 32 \\ 8 & 18 & 32 & 66 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A la main rendre la matrice échelonnée puis résoudre le système par cascade.

Par maple : avec la fonction $"augment"$ puis *"gausselim" on trouve :*

$>augment(B, c);$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 8 & 4 \\ 2 & 6 & 8 & 18 & 0 \\ 6 & 8 & 18 & 32 & 2 \\ 8 & 18 & 32 & 66 & 0 \end{pmatrix}$$

$>gausselim(augment(B, c))$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 14 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

le système $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 8 & 18 \\ 6 & 8 & 18 & 32 \\ 8 & 18 & 32 & 66 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ devient $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 5 & 5 & 14 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{5} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

ce qui donne $Z = (z_0, z_1, z_2, z_3) = (2, -\frac{1}{3}, -1, \frac{1}{3})$.

d. $P_0(X) = 2 - \frac{1}{3}X - X^2 + \frac{1}{3}X^3$.

$\lambda_3 = \Phi_3(\mathrm{P}_0) = \|b - AZ\|_4^2 = 198$.

e. Avec maple :

$>with(plots):$

$>p[0] := x- > 2 - 1/3 * x - x\hat{}2 + 1/3 * x\hat{}3;$

$$p_0 := 2 - \frac{1}{3}x - x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

$> plot(p[0](x), x = -infinity.. + infinity);$

$> F := plot(p[0](x), x = -infinity.. + infinity):$

$> L := [[-1, 1], [0, 2], [1, 1], [2, 0]];$

$$L := [[-1, 1], [0, 2], [1, 1], [2, 0]]$$

$> G := plot(L, style = point, thickness = 7, color = blue):$

$> display(\{F, G\});$

c'est une occasion de se familiariser avec maple ! !

Fin .